FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA101 – Matematika 1

4. Vektorový počet

4.4 Skalární součin vektorů
4.5 Vektorový součin vektorů
4.6 Smíšený součin vektorů

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

[1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6

[2] Chrastinová, Veronika: *Matematika I, Modul 3, Vektorová algebra a analytická geometrie*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, Brno 2004.

[3] Horňáková, Dagmar: *Matematika I_5, Vektorová algebra*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, vydal ECON publishing, s.r.o., Brno 2001. ISBN: 80-902268-9-2

4.4 Skalární součin vektorů

Definice

Skalárním součinem nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ rozumíme číslo (skalár)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi,$$

kde $\varphi = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ jsou jejich délky.
Je-li alespoň jeden z vektorů nulový, klademe $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Platí

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \qquad (\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o})$

4.4 Skalární součin vektorů

Využití

- Vyšetřování kolmosti nenulových vektorů:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

- Výpočet délky nenulového vektoru:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

- Výpočet úhlu nenulových vektorů:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}, \qquad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle$$

Výpočet

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
- Délka úsečky AB:
  $|AB| = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Příklad 4.3

Určete $k \in \mathbb{R}$ tak, aby vektory $\vec{a}, \vec{b}$ byly ortogonální.
$\vec{a} = (2, -1, k)$, $\vec{b} = (5, 4, 2)$

Příklad 4.4

Určete úhel vektorů $\vec{a}, \vec{b}$.
$\vec{a} = (2, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$

Definice

Vektorovým součinem vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ rozumíme vektor označovaný $\vec{u} \times \vec{v}$.

- Je-li alespoň jeden z vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ nulový nebo jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ kolineární, pak $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$.
- V opačném případě požadujeme, aby měl vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ následující vlastnosti:
  1. Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}, \vec{v}$.
  2. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ tvoří v tomto pořadí pozitivní trojici vektorů (platí pravidlo pravé ruky).
  3. Délka vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$, tj.
     $$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\varphi,$$
     kde $\varphi = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.

Platí

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
2. $\alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
4. $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$

Pozor!

- $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$,
- $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$,
- Neplatí: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \quad \Rightarrow \quad (\vec{u} = \vec{o}$ nebo $\vec{v} = \vec{o})$.

Využití

- Vyšetřování kolinearity nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi, \text{ tj. } \vec{u} = k\vec{v}).$$

- Výpočet obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$S = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Výpočet obsahu trojúhelníku určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Nalezení vektoru kolmého ke dvěma daným nenulovým vektorům.

Výpočet

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

- $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

Determinant vypočteme pomocí Laplaceova rozvoje podle prvního řádku.

Příklad 4.5 !

Jsou dány vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

a) Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ kolineární.

b) Vypočtěte obsah rovnoběžníku určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.

c) Určete vektor $\vec{x}$ kolmý k vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$ délky 15.

d) Určete vektor $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ kolmý k vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$ takový, že $2y_1 + 3y_2 + y_3 = 12$.

Příklad 4.6 !

Jsou dány body $A = [1, 2, 0]$, $B = [-1, 1, 3]$, $C = [1, 3, -1]$. Určete

a) obsah $\triangle ABC$,

b) délku strany $a = BC$,

c) délku výšky na stranu a,

d) velikost úhlu $\alpha = \measuredangle BAC$.

Definice

Smíšeným součinem vektorů $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ (v tomto pořadí) nazveme číslo

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Využití

- Výpočet objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$:

$$V = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

- Výpočet objemu čtyřstěnu určeného vektory $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$:

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

- Vyšetřování komplanárnosti vektorů:

Nenulové vektory $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ jsou komplanární $\Leftrightarrow$ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0$

Výpočet

$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\vec{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$

- $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Příklad 4.7 !

Jsou dány vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

a) Ověřte, že vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nejsou komplanární.
b) Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
c) Vypočtěte objem čtyřstěnu určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
d) Vypočtěte obsah stěny rovnoběžnostěnu určené vektory $\vec{a}, \vec{b}$.
e) Určete délku výšky rovnoběžnostěnu na stěnu určenou vektory $\vec{a}, \vec{b}$.