

BAA001 Matematika 1

## 3. DERIVACE FUNKCE

3.1 Derivace funkce

3.2 Derivace vyšších řádů

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

### Definice

Je-li funkce  $f$  je definovaná v nějakém okolí  $\mathcal{U}(x_0)$  bodu  $x_0 \in \mathbb{R}$  a existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu **derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0$**  a značíme  $f'(x_0)$ .

- $f'(x_0) \in \mathbb{R}$  ... funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  **vlastní derivaci**
- $f'(x_0) = \pm\infty$  ... funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  **nevlastní derivaci**
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \nexists$  ... funkce  $f$  nemá v bodě  $x_0$  derivaci

### Definice

**Derivace zprava** funkce  $f$  v bodě  $x_0$ :  $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

**Derivace zleva** funkce  $f$  v bodě  $x_0$ :  $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

### Definice

Má-li funkce  $f$  v každém bodě množiny  $M \subseteq D(f)$  vlastní derivaci, pak se funkce  $f' : x \mapsto f'(x)$  s definičním oborem  $M$  nazývá **derivací funkce  $f$  na množině  $M$** .

Slovem **derivace** budeme v dalším textu rozumět vlastní derivaci.

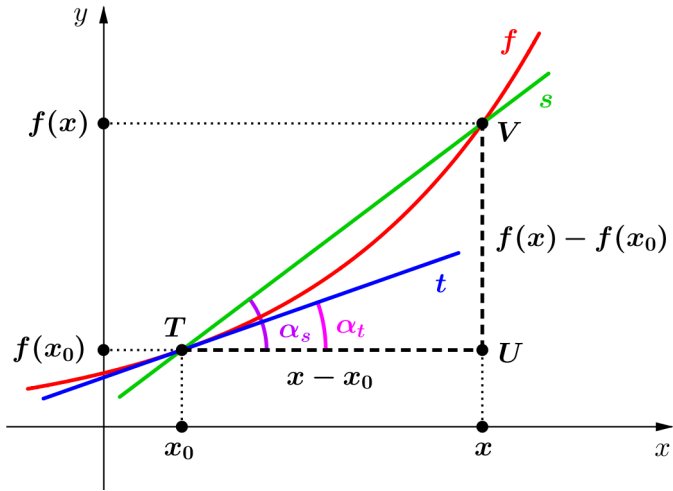
### Platí

1. Funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  nejvýše jednu derivaci.
2. Funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  derivace právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci zprava i zleva a platí  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ .
3. Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

*Pozor, tvrzení 3 neplatí obráceně.*

*Např. funkce  $f(x) = |x|$  je spojitá v bodě  $x_0 = 0$ , ale derivaci v tomto bodě nemá.*

# 3.1 Derivace funkce → Geometrický význam derivace



$$x \rightarrow x_0$$

⇓

sečna  $s$  → tečna  $t$

Směrnice sečny:

$$\operatorname{tg} \alpha_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Směrnice tečny:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_t &= \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \alpha_s = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Rovnice **tečny** ke grafu funkce  $f$  v bodě  $T[x_0, f(x_0)]$ :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Rovnice **normály** ke grafu funkce  $f$  v bodě  $T[x_0, f(x_0)]$ :

- $f'(x_0) \neq 0$ : 
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$
- $f'(x_0) = 0$ : 
$$x = x_0$$

### Pravidla pro derivování

1.  $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$

2.  $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

3.  $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4.  $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x_0) \neq 0$

## Derivace elementárních funkcí

- $(c)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$



### Příklad

Derivujte funkce:

a)  $f(x) = x^3 + 5x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{4x} + \ln 2$

b)  $f(x) = x \cdot \ln x$

c)  $f(x) = \frac{\sin x}{x^5}$

d)  $f(x) = \frac{1 - x^4}{\ln 4}$

e)  $f(x) = \frac{e^x(1 - x)}{1 + x}$

### Příklad

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce  $f(x) = x^3$  v bodě  $T[2, ?]$ .

### Derivace složené funkce

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

#### **Poznámka:**

Při derivování složené funkce je vhodné začít od vnější složky a pokračovat dovnitř („jako když loupeme cibuli“), tj.

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

### Příklad

Derivujte funkce:

a)  $f(x) = e^{-2x}$

c)  $f(x) = \sqrt{1 + \ln^2 x}$

b)  $f(x) = \sin(\ln(x^2 + 1))$

d)  $f(x) = \cos^3 \frac{x}{4}$

### Příklad

Derivujte funkce a výsledek upravte:

a)  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2}$

b)  $f(x) = 2 \operatorname{arccos} \frac{1}{\sqrt{x}}$

c)  $f(x) = x \cdot \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$

### Definice

Derivace  $n$ -tého řádu v bodě  $x_0$ :

$$f^{(n)}(x_0) = [f^{(n-1)}]'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

Derivace 1. řádu:  $f'(x)$

Derivace 2. řádu:  $f''(x) = [f'(x)]'$

Derivace 3. řádu:  $f'''(x) = [f''(x)]'$

Derivace 4. řádu:  $f^{(4)}(x) = [f'''(x)]'$

Derivace 5. řádu:  $f^{(5)}(x) = [f^{(4)}(x)]'$

⋮

### Příklad

Určete derivaci 4. řádu funkce  $f$ :

a)  $f(x) = \ln x$

b)  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

c)  $f(x) = \sin 2x$

**DĚKUJI  
ZA  
POZORNOST!**