BAA001 Matematika 1

3. DERIVACE FUNKCE

3.1 Derivace funkce
3.2 Derivace vyšších řádů

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018. ISBN: 978-80-7204-982-0

3.1 Derivace funkce

Definice

Je-li funkce f je definovaná v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu **derivací funkce f v bodě x_0** a značíme $\boldsymbol{f'(x_0)}$.

- $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ ... funkce f má v bodě x_0 **vlastní derivaci**
- $f'(x_0) = \pm\infty$ ... funkce f má v bodě x_0 **nevlastní derivaci**
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \nexists$ ... funkce f nemá v bodě x_0 derivaci

3.1 Derivace funkce

Definice

Derivace zprava funkce f v bodě x_0: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Derivace zleva funkce f v bodě x_0: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Definice

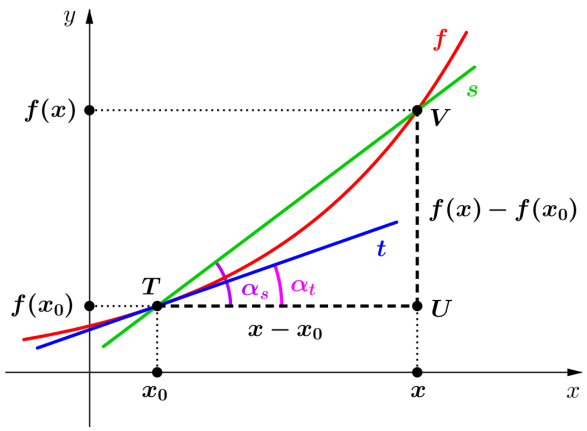
Má-li funkce f v každém bodě množiny $M \subseteq D(f)$ vlastní derivaci, pak se funkce $f' : x \mapsto f'(x)$ s definičním oborem M nazývá **derivací funkce f na množině M**.

Slovem **derivace** budeme v dalším textu rozumět vlastní derivaci.

Platí

1. Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
2. Funkce f má v bodě x_0 derivace právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci zprava i zleva a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
3. Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

Pozor, tvrzení 3 neplatí obráceně.
Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$, ale derivaci v tomto bodě nemá.



$$x \to x_0$$
$$\Downarrow$$
sečna s $\to$ tečna t

Směrnice sečny:
$$\operatorname{tg} \alpha_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Směrnice tečny:
$$\operatorname{tg} \alpha_t = \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} \alpha_s = = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = = f'(x_0)$$

Rovnice **tečny** ke grafu funkce f v bodě $T[x_0,\ f(x_0)]$:

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Rovnice **normály** ke grafu funkce f v bodě $T[x_0,\ f(x_0)]$:

- $f'(x_0) \neq 0$: $\quad \boldsymbol{y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$
- $f'(x_0) = 0$: $\quad \boldsymbol{x = x_0}$

Pravidla pro derivování

1. $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$
2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x_0) \neq 0$

Derivace elementárních funkcí

- $(c)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Příklad 3.1

Derivujte funkce:

a) $f(x) = 2x^7 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{4x} - \sqrt[3]{x} + \ln 2$

b) $f(x) = x \cdot \ln x$

c) $f(x) = \frac{\sin x}{x^5}$

Příklad 3.2

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3$ v bodě $T[2, ?]$.

Derivace složené funkce

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Poznámka:
Při derivování složené funkce je vhodné začít od vnější složky a pokračovat dovnitř („jako když loupeme cibuli“), tj.

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Příklad 3.3

Derivujte funkce bez úprav:

a) $f(x) = e^{-2x^4}$

b) $f(x) = \cos^3 \frac{x}{4}$

Příklad 3.4 !

Derivujte funkci f a výsledek upravte:

$$f(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Definice

Derivace n-tého řádu v bodě x_0:

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x_0) = \left[f^{(n-1)}\right]'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}}$$

Derivace 1. řádu: $f'(x)$

Derivace 2. řádu: $f''(x) = [f'(x)]'$

Derivace 3. řádu: $f'''(x) = [f''(x)]'$

Derivace 4. řádu: $f^{(4)}(x) = [f'''(x)]'$

Derivace 5. řádu: $f^{(5)}(x) = [f^{(4)}(x)]'$

$\vdots$

3.2 Derivace vyšších řádů

Příklad 3.5

Určete derivaci 4. řádu funkce f:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

b) $f(x) = \sin 2x$