BAA001 Matematika 1

2. LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018. ISBN: 978-80-7204-982-0

2.1 Limita funkce

Definice

Rozšířenou množinou reálných čísel $\mathbb{R}^*$ rozumíme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšířenou o body ∞ a $-\infty$, tj.

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty,\ -\infty\}.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme **nevlastní čísla**, zatímco body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **vlastní čísla**.

2.1 Limita funkce

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ definujeme

- **okolí bodu x_0** jako
$$\mathcal{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta),$$
- **pravé okolí bodu x_0** jako
$$\mathcal{U}^+(x_0, \delta) = \langle x_0,\ x_0 + \delta),$$
- **levé okolí bodu x_0** jako
$$\mathcal{U}^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta,\ x_0\rangle.$$

Pro $x_0 \in \mathbb{R},\ \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0$ definujeme

- **prstencové okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{P}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) - \{x_0\},$$

- **pravé prstencové okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{P}^+(x_0, \delta) = (x_0,\ x_0 + \delta),$$

- **levé prstencové okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{P}^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta,\ x_0).$$

Pro $\pm\infty,\ \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0$ definujeme

- **(prstencové) okolí bodu ∞** jako

$$\mathcal{U}(\infty, \delta) = \mathcal{P}(\infty, \delta) = (\tfrac{1}{\delta},\ \infty),$$

- **(prstencové) okolí bodu $-\infty$** jako

$$\mathcal{U}(-\infty, \delta) = \mathcal{P}(-\infty, \delta) = (-\infty,\ -\tfrac{1}{\delta}).$$

Definice (Cauchyho definice limity)

Funkce $f : y = f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ **limitu** rovnu číslu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ je funkce f definována a platí $f(x) \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$.

Píšeme $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \ \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+;\ \forall\, x \in \mathcal{P}(x_0, \delta) : x \in D(f) \wedge f(x) \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

Věta

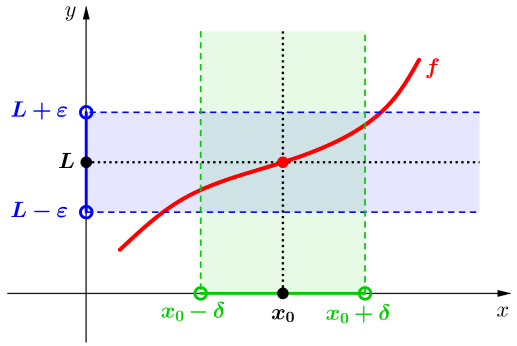
Každá funkce má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.

Limitu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ nazýváme

1) **vlastní limita ve vlastním bodě** $\iff$ $x_0 \in \mathbb{R}$ a $L \in \mathbb{R}$
2) **nevlastní limita ve vlastním bodě** $\iff$ $x_0 \in \mathbb{R}$ a $L = \pm\infty$
3) **vlastní limita v nevlastním bodě** $\iff$ $x_0 = \pm\infty$ a $L \in \mathbb{R}$
4) **nevlastní limita v nevlastním bodě** $\iff$ $x_0 = \pm\infty$ a $L = \pm\infty$

2.1 Limita funkce

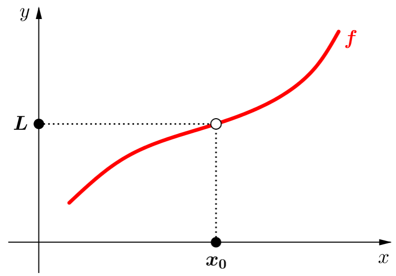
1) **vlastní limita ve vlastním bodě:** $x_0 \in \mathbb{R},\ L \in \mathbb{R}$



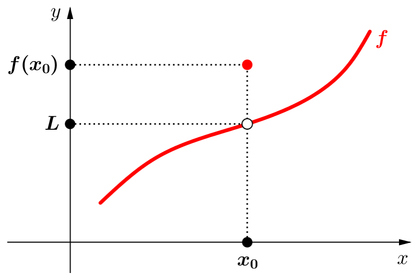
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

2.1 Limita funkce

1) **vlastní limita ve vlastním bodě:** $x_0 \in \mathbb{R},\ L \in \mathbb{R}$



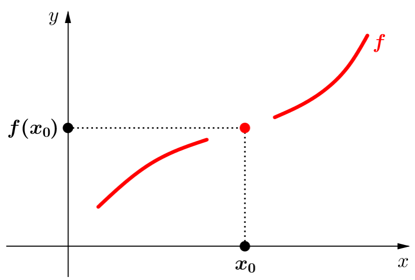
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$



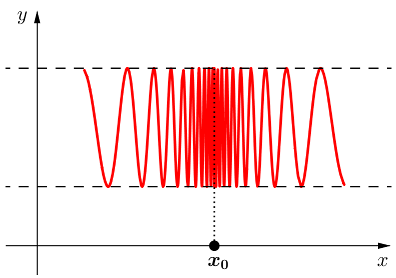
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

2.1 Limita funkce

1) **vlastní limita ve vlastním bodě:** $x_0 \in \mathbb{R},\ L \in \mathbb{R}$



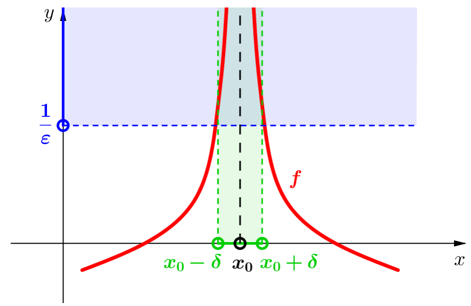
$$\lim_{x\to x_0} f(x)\ \nexists$$



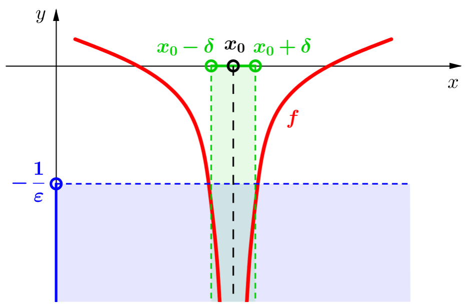
$$\lim_{x\to x_0} f(x)\ \nexists$$

2.1 Limita funkce

2) **nevlastní limita ve vlastním bodě:** $x_0 \in \mathbb{R},\ L = \pm\infty$

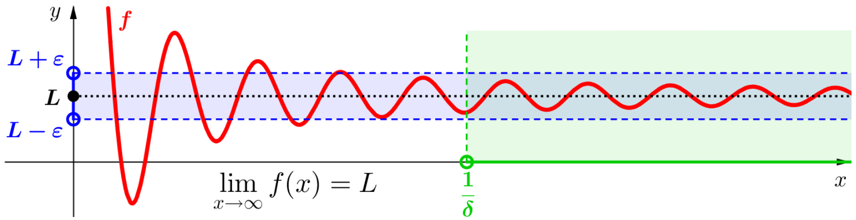


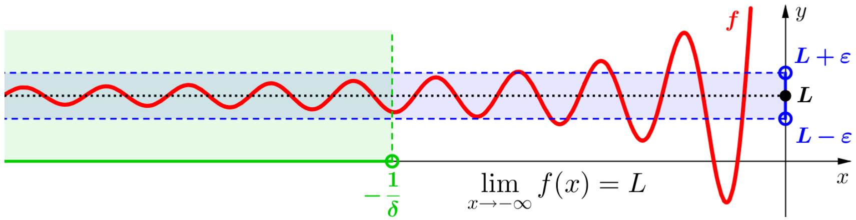
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$



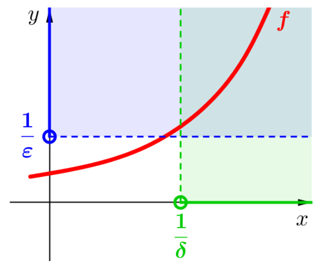
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

3) **vlastní limita v nevlastním bodě:** $x_0 = \pm\infty,\ L \in \mathbb{R}$

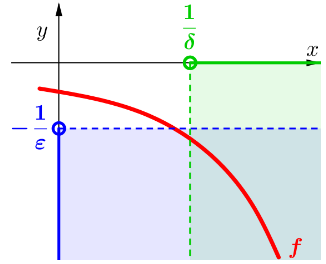




4) **nevlastní limita v nevlastním bodě:** $x_0 = \pm\infty,\ L = \pm\infty$

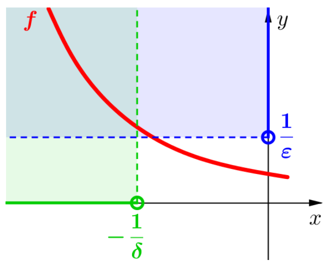


$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

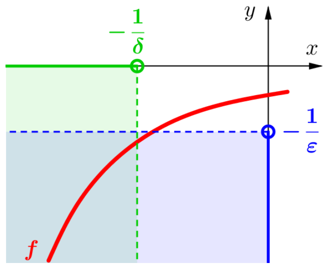


$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

4) **nevlastní limita v nevlastním bodě:** $x_0 = \pm\infty,\ L = \pm\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Poznámka

Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$ a zaměníme-li v definici limity $\mathcal{P}(x_0)$ za $\mathcal{P}^+(x_0)$, resp. $\mathcal{P}^-(x_0)$, dostaneme definici **limity zprava**, resp. **limity zleva**, (jednostranné limity).

Píšeme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L}$, resp. $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L}$.

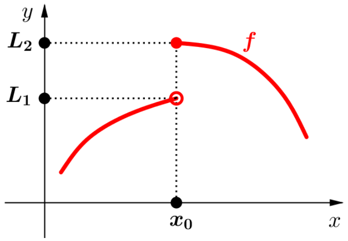
Věta

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$ platí:

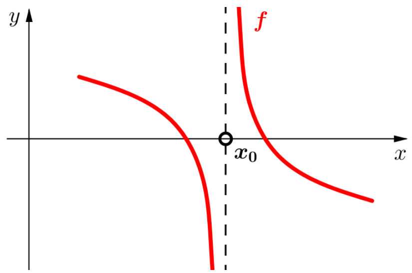
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \Rightarrow\ \lim_{x\to x_0} f(x)\ \nexists$$

2.1 Limita funkce



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \nexists$$



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \nexists$$

2.1 Limita funkce

Příklad 2.1

Z grafu funkce určete limity.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x$

$\lim\limits_{x\to \infty} \ln x$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{(x-2)^2} + 1\right)$

$\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{1}{(x-2)^2} + 1\right)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{(x-2)^2} + 1\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arctg} x$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x$

2.2 Spojitost funkce

Definice

Funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

a) f je definovaná v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$,

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definice

Funkce f je **spojitá zprava v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, resp. **spojitá zleva v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

a) f je definovaná v pravém okolí $\mathcal{U}^+(x_0)$, resp. v levém okolí $\mathcal{U}^-(x_0)$,

b) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, resp. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

2.2 Spojitost funkce

Definice

Funkce f je **spojitá na otevřeném intervalu** $(a, b) \subseteq D(f)$, je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Definice

Funkce f je **spojitá na uzavřeném intervalu** $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$, je-li spojitá na intervalu (a, b) a současně je spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b.

Je-li funkce f spojitá v bodě x_0, pak má v tomto bodě limitu rovnu funkční hodnotě $f(x_0)$.

Věta

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$, přičemž $L_1,\ L_2,\ x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak platí:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ pro $L_2 \neq 0$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |L_1|$.

Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, platí uvedená tvrzení i pro jednostranné limity.

Limita složené funkce

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))$$

Věta

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^*$ a existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)$ platí

- $f(x) > 0,$ pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty,$
- $f(x) < 0,$ pak $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty.$

Definované operace

pro reálná čísla $k \in \mathbb{R}$ a nevlastní čísla ∞ a $-\infty$:

- $\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$
- $k \pm \infty = \pm\infty + k = \pm\infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty,$
  $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty, \quad -(-\infty) = \infty$
- $k \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot k = \pm\infty$ pro $k > 0$
  $k \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot k = \mp\infty$ pro $k < 0$
- $\dfrac{k}{\pm\infty} = 0$
- $k^\infty = 0$ pro $0 < k < 1$
  $k^\infty = \infty$ pro $k > 1$
  $\infty^\infty = \infty$

Neurčité výrazy

Nejsou definovány (tzv. neurčité) výrazy:

- $\infty - \infty, \quad -\infty + \infty$
- $0 \cdot \infty, \quad 0 \cdot (-\infty)$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \dfrac{\pm\infty}{\mp\infty}$
- $\dfrac{k}{0}, \quad \dfrac{\pm\infty}{0}$
- $(\pm\infty)^0, \quad 0^0$
- $1^\infty, \quad k^\infty$ pro $k < 0$

Neurčité výrazy a výrazy obsahující prvky ∞ a $-\infty$ budeme zapisovat do [ ].

Příklad 2.2

Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 - x + 1)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x - 1}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x}{x - 1}$