FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika 1

2. LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Definice

Rozšířenou množinou reálných čísel $\mathbb{R}^*$ rozumíme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšířenou o body ∞ a $-\infty$, tj.

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, \ -\infty\}.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme **nevlastní čísla**, zatímco body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **vlastní čísla**.

Definované operace

pro reálná čísla $k \in \mathbb{R}$ a nevlastní čísla ∞ a $-\infty$:

- $\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$
- $k \pm \infty = \pm\infty + k = \pm\infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty,$
  $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty, \quad -(-\infty) = \infty$
- $k \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot k = \pm\infty \quad \text{pro } k > 0$
  $k \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot k = \mp\infty \quad \text{pro } k < 0$
- $\dfrac{k}{\pm\infty} = 0$
- $k^{\infty} = 0 \quad \text{pro } 0 < k < 1$
  $k^{\infty} = \infty \quad \text{pro } k > 1$
  $\infty^{\infty} = \infty$

Neurčité výrazy

Nejsou definovány (tzv. neurčité) výrazy:

- $\infty - \infty, \quad -\infty + \infty$
- $0 \cdot \infty, \quad 0 \cdot (-\infty)$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \dfrac{\pm\infty}{\mp\infty}$
- $\dfrac{k}{0}, \quad \dfrac{\pm\infty}{0}$
- $(\pm\infty)^0, \quad 0^0$
- $1^\infty, \quad k^\infty \quad \text{pro } k < 0$

Neurčité výrazy a výrazy obsahující prvky ∞ a $-\infty$ budeme zapisovat do [ ].

Definice

Posloupnost reálných čísel je funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ a oborem hodnot podmnožina $\mathbb{R}$. Funkční hodnotu $f(n)$ značíme a_n (**n-tý člen posloupnosti**).
Posloupnost značíme: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo $(a_n)_1^{\infty}$ nebo (a_n), $n \in \mathbb{N}$.

Příklad

Příklady posloupností

- $(a_n) = \frac{1}{n}$
- $(a_n) = n \sin(n\frac{\pi}{2})$
- $(a_n) = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Definice

Posloupnost (a_n) má limitu a $\in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$, tj. $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
Píšeme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Posloupnost (a_n) má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže ke každému $h \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n > h$ (resp. $a_n < h$).
Píšeme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Příklad

$$a_n = \frac{3n+1}{n}$$

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$$

$$a_5 = \frac{16}{5} = 3 + \frac{1}{5}$$

$$\lim a_n = 3$$

např. pro $\varepsilon = \frac{1}{4} \rightarrow n_0 = 5$

Definice

Posloupnost je:

- **konvergentní** $\iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ … posloupnost má vlastní limitu
- **divergentní** $\iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ … posloupnost má nevlastní limitu
- **oscilující** $\iff$ posloupnost nemá limitu

Věta

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta

Je-li $a_n > 0$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$.

Věta

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, přičemž $a, b \in \mathbb{R}^*$, pak platí

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

Příklad

Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(5n^2 - 3n)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2 + 5n}{2n^2 - 1}$

Pro $x_0 \in \mathbb{R},\ \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0$ definujeme

- **prstencové okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{P}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) - \{x_0\},$$

- **pravé prstencové okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{P}^+(x_0, \delta) = (x_0,\ x_0 + \delta),$$

- **levé prstencové okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{P}^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta,\ x_0).$$

Definice (Heineho definice limity)

Funkce $f : y = f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ **limitu** rovnu číslu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže

1) funkce f je definovaná v nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$,
2) pro každou posloupnost $(x_n) \subset \mathcal{P}(x_0)$ s vlastností $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Píšeme $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L}$.

Limitu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ nazýváme

1) **vlastní limita ve vlastním bodě** $\iff$ $x_0 \in \mathbb{R}$ a $L \in \mathbb{R}$
2) **nevlastní limita ve vlastním bodě** $\iff$ $x_0 \in \mathbb{R}$ a $L = \pm\infty$
3) **vlastní limita v nevlastním bodě** $\iff$ $x_0 = \pm\infty$ a $L \in \mathbb{R}$
4) **nevlastní limita v nevlastním bodě** $\iff$ $x_0 = \pm\infty$ a $L = \pm\infty$

Poznámka

Zaměníme-li v definici limity $\mathcal{P}(x_0)$ za $\mathcal{P}^+(x_0)$, resp. $\mathcal{P}^-(x_0)$, dostaneme definici **limity zprava**, resp. **limity zleva**, (jednostranné limity).

Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$, resp. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Věta

Každá funkce má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.

Věta

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$ platí:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) \qquad \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \nexists$$

Příklad

Z grafu funkce určete limity.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln x =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x =$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x =$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x =$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x =$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x =$

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ definujeme

- **okolí bodu x_0** jako
$$\mathcal{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta),$$
- **pravé okolí bodu x_0** jako
$$\mathcal{U}^+(x_0, \delta) = \langle x_0,\ x_0 + \delta),$$
- **levé okolí bodu x_0** jako
$$\mathcal{U}^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta,\ x_0\rangle.$$

Definice

Funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

a) f je definovaná v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definice

Funkce f je **spojitá zprava v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, resp. **spojitá zleva v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

a) f je definovaná v pravém okolí $\mathcal{U}^+(x_0)$, resp. v levém okolí $\mathcal{U}^-(x_0)$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, resp. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Definice

Funkce f je **spojitá na otevřeném intervalu** $(a, b) \subseteq D(f)$, je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Definice

Funkce f je **spojitá na uzavřeném intervalu** $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$, je-li spojitá na intervalu (a, b) a současně je spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b.

Je-li funkce f spojitá v bodě x_0, pak má v tomto bodě limitu rovnu funkční hodnotě $f(x_0)$.

2.4 Vlastnosti limity funkce

Věta

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$, přičemž $L_1,\ L_2,\ x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak platí:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2} \quad$ pro $L_2 \neq 0$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |L_1|$.

Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, platí uvedená tvrzení i pro jednostranné limity.

Limita složené funkce

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x))$$

Věta

Je-li $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^*$ a existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)$ platí

- $f(x) > 0, \quad$ pak $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty,$
- $f(x) < 0, \quad$ pak $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty.$

Příklad

a) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - x + 1)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2}$

DĚKUJI ZA POZORNOST!