FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika 1

1. REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

1.7 Polynomy

1.8 Racionální funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Definice

Reálný polynom n-tého stupně je reálná funkce definovaná v $\mathbb{R}$ tvaru

$$f(x) = \boldsymbol{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0;\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0.$

- $a_0, \dots, a_n$ .... **koeficienty** polynomu
- a_0 .... **absolutní člen**
- $n = \operatorname{st} f$ ...... **stupeň polynomu**

Poznámka:
Polynom stupně

- 0 je **konstantní** funkce … např. $P_0(x) = 7$
- 1 je **lineární** funkce … např. $P_1(x) = 5x - 1$
- 2 je **kvadratická** funkce … např. $P_2(x) = 3x^2 - 4x + 2$

Operace s polynomy

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad g(x) = Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

1) Sčítání, odčítání polynomů

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) x^k \text{ pro } \quad n \geq m$$

Sčítáme / odčítáme koeficienty u odpovídajících si mocnin.

2) Násobení polynomu konstantou

$$r \cdot f(x) = \sum_{k=0}^{n} r a_k x^k \text{ pro } \quad r \in \mathbb{R}$$

3) Násobení polynomů

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k, \quad \text{kde} \quad c_k=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Násobíme postupně každý sčítanec prvního polynomu všemi sčítanci druhého polynomu.

Platí

$$\operatorname{st}(f+g)\le \max(\operatorname{st} f, \operatorname{st} g)$$
$$\operatorname{st}(f\cdot g)=\operatorname{st} f+\operatorname{st} g$$

4) Dělení polynomů

Jsou-li P_n, Q_m polynomy stupňů $n \geq m > 0$, pak existují právě dva polynomy H_{n-m}, R_j (stupňů $n-m$, $j < m$) pro které platí

$$P_n = Q_m \cdot H_{n-m} + R_j, \text{ tj.}$$

$$\frac{P_n}{Q_m} = H_{n-m} + \frac{R_j}{Q_m}, \text{ pokud } Q_m \neq 0$$

Q_m … **dělitel**

H_{n-m} … **podílový polynom**

R_j … **zbytek**

$R_j = 0$ … polynom P_n je **dělitelný** polynomem Q_m

5) Rovnost polynomů

$$P_n = Q_m \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1.\ n = m \\ 2.\ a_i = b_i, \text{ pro } i = 0, 1, \dots, n \end{array}$$

Stupně polynomů a koeficienty u stejných mocnin jsou si rovny.

Příklad

Jsou dány polynomy $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 1, \ \ g(x) = 3x - 2$. Vypočtěte:
a) $f(x) + g(x)$, b) $f(x) \cdot g(x)$.

Příklad

Jsou dány polynomy $f(x) = 6x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 8x - 5, \ \ g(x) = 2x^2 - x + 1$.
Vypočtěte $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Definice

Je-li P_n polynom stupně $n \geq 1$, pak

- číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme **kořenem** polynomu P_n, jestliže platí $P_n(x_0) = 0$;
- číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme ***k*-násobným kořenem** polynomu P_n, jestliže platí $P_n(x) = (x - x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x),$ přičemž $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$;
- výraz $x - x_0$ nazýváme **kořenovým činitelem**.

Kořenové vlastnosti polynomů

- V $\mathbb{C}$ má každý polynom n-tého stupně právě n kořenů (přičemž každý kořen je počítán tolikrát, jaká je jeho násobnost) a platí

$$P_n(x) = a_n(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

  Jde o tzv. **rozklad polynomu na součin kořenových činitelů**.
- S každým k-násobným kořenem $a + bi$ má polynom také k-násobný kořen $a - bi$.
- Polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.
- Má-li polynom P_n *celočíselné* koeficienty $a_i \in \mathbb{Z},\ i = 0, \ldots, n$ a
  - kořen $x_0 \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow\ x_0 | a_0$,
  - kořen $x_0 = \dfrac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ p|a_0,\ q|a_n$.

Kořenové vlastnosti polynomů

- Rozklad polynomu v *reálném oboru*:

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\cdot((x-a_1)^2+b_1^2)^{\ell_1}\cdot\ldots\cdot((x-a_s)^2+b_s^2)^{\ell_s},$$

kde polynom P_n má reálné kořeny $x_1,\ldots,x_r$ násobností $k_1,\ldots,k_r$, komplexní kořeny $a_1\pm b_1 i,\ldots,a_s\pm b_s i$ násobností $\ell_1,\ldots,\ell_s$ a platí $k_1+\cdots+k_r+2\ell_1+\cdots+2\ell_s=n$.

Jde tedy o součin polynomů tvaru

- $(ex+d)^k,\ e\neq 0,\ k\in\mathbb{N}$
- $(ax^2+bx+c)^\ell,\ a\neq 0,\ D=b^2-4ac<0,\ \ell\in\mathbb{N}$

Příklad

Najděte reálné kořeny polynomu $f(x)$ a určete jejich násobnost.

$$f(x) = (x-1)^2(x+4)(2x-1)^3(x^2+x+1)(5x^2+3)^3$$

Hornerovo schéma

$$P_n(x) = (x-c)\cdot H_{n-1}(x) + d, \qquad H_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
$x=c$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$d = P_n(c)$

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= c\cdot b_{n-1} + a_{n-1} \\ b_{n-3} &= c\cdot b_{n-2} + a_{n-2} \\ &\vdots \\ b_0 &= c\cdot b_1 + a_1 \\ d &= c\cdot b_0 + a_0 \end{aligned}$$

je-li $d = 0$ pak c je kořen polynomu $P_n(x)$

Příklad

Určete kořeny a rozklad v reálném oboru polynomu $f(x)$.

$f(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Věta

Na změnu znaménka polynomu mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti.

Příklad

Určete znaménko polynomu $f(x) = x^3(x-2)^5(x+4)(x-5)^4(x+1)^2(x^2+9)$.

Příklad

Určete kořeny, rozklad v reálném oboru a znaménko polynomu $f(x)$.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

b) $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2$

c) $f(x) = x^3 - 3x - 2$

Definice

Racionální funkcí $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{P_m}{Q_n}}$ nazýváme podíl dvou nenulových polynomů P_m, Q_n stupňů m, n.

- $m < n$ ... **ryzí racionální funkce**
- $m \geq n$ ... **neryzí racionální funkce**

Věta

Každá neryzí racionální funkce je buď polynom nebo ji lze vyjádřit jako součet polynomu a ryzí racionální funkce.

Příklad

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 2} =$$

Věta

Na změnu znaménka racionální funkce $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$, kde polynomy P_m, Q_n nemají společné kořeny, mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti čitatele a jmenovatele.

Příklad

Určete znaménko funkce $f(x)$

a) $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-5)^2(2x^2+1)}{x^4(x-1)^3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+1}$

Věta

Každou ryzí racionální funkci $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$ lze rozložit na součet parciálních zlomků.

- V rozkladu Q_n je $(cx+d)^k,\ c \neq 0\ \rightarrow$
  $\rightarrow$v rozkladu $f(x)$ je součet k parciálních zlomků:

$$\frac{C_1}{cx+d} + \frac{C_2}{(cx+d)^2} + \cdots + \frac{C_k}{(cx+d)^k}$$

- V rozkladu Q_n je $(ax^2+bx+c)^\ell,\ a \neq 0, D < 0\ \rightarrow$
  $\rightarrow$v rozkladu $f(x)$ je součet ℓ parciálních zlomků:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_\ell x+B_\ell}{(ax^2+bx+c)^\ell}$$

Příklad

Napište obecný tvar rozkladu racionální funkce $f(x)$ na parciální zlomky:

$$f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)(x-3)^3(x^2+x+1)(x^2+1)^2}$$

Postup při rozkladu racionální funkce na parciální zlomky:

1. Je funkce $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$ ryzí? Pokud není, vydělíme $P_m : Q_n$ a rozkládáme zbytek (RRF).
2. Rozklad jmenovatele Q_n na součin kořenových činitelů.
3. Obecný tvar (schéma) rozkladu.
4. Výpočet neurčitých koeficientů (konstant).

Příklad

Rozložte funkci $f(x)$ na parciální zlomky.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x-6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^4+2x}{x^3+3x^2+3x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^4+x^3+x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4+x^3+x^2+x}$

DĚKUJI
ZA
POZORNOST!