

1. REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

- 1.7 Polynomy
- 1.8 Racionální funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018. ISBN: 978-80-7204-982-0

1.7 Polynomy

Definice

Reálný polynom n -tého stupně je reálná funkce definovaná v \mathbb{R} tvaru

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$; $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

- a_0, \dots, a_n **koeficienty** polynomu
- a_0 **absolutní člen**
- $n = \text{st } f$ **stupeň polynomu**

1.7 Polynomy

Poznámka:

Polynom stupně

- 0 je **konstantní** funkce ... např. $P_0(x) = 7$
- 1 je **lineární** funkce ... např. $P_1(x) = 5x - 1$
- 2 je **kvadratická** funkce ... např. $P_2(x) = 3x^2 - 4x + 2$

Operace s polynomy

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad g(x) = Q_m(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

1) Sčítání, odčítání polynomů

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \pm b_k) x^k \quad \text{pro } n \geq m$$

Sčítáme / odčítáme koeficienty u odpovídajících si mocnin.

2) Násobení polynomu konstantou

$$r \cdot f(x) = \sum_{k=0}^n r a_k x^k \quad \text{pro } r \in \mathbb{R}$$

3) Násobení polynomů

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k, \quad \text{kde } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

Násobíme postupně každý sčítanec prvního polynomu všemi sčítanci druhého polynomu.

Platí

$$\begin{aligned} \text{st}(f + g) &\leq \max(\text{st } f, \text{st } g) \\ \text{st}(f \cdot g) &= \text{st } f + \text{st } g \end{aligned}$$

4) Dělení polynomů

Jsou-li P_n , Q_m polynomy stupňů $n \geq m > 0$, pak existují právě dva polynomy H_{n-m} , R_j (stupňů $n - m$, $j < m$) pro které platí

$$\begin{aligned} P_n &= Q_m \cdot H_{n-m} + R_j, \quad \text{tj.} \\ \frac{P_n}{Q_m} &= H_{n-m} + \frac{R_j}{Q_m}, \quad \text{pokud } Q_m \neq 0 \end{aligned}$$

Q_m ... dělitel

H_{n-m} ... podílový polynom

R_j ... zbytek

$R_j = 0$... polynom P_n je dělitelný polynomem Q_m

5) Rovnost polynomů

$$\begin{aligned} P_n = Q_m &\Leftrightarrow 1. n = m \\ &2. a_i = b_i, \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Stupně polynomů a koeficienty u stejných mocnin jsou si rovny.

Příklad 1.4

Jsou dány polynomy $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 3x - 2$. Vypočtěte:
a) $f(x) + g(x)$, b) $f(x) \cdot g(x)$.

Příklad 1.5

Jsou dány polynomy $f(x) = 6x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 8x - 5$, $g(x) = 2x^2 - x + 1$.
Vypočtěte $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Definice

Je-li P_n polynom stupně $n \geq 1$, pak

- číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme **kořenem** polynomu P_n , jestliže platí $P_n(x_0) = 0$;
- číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme **k -násobným kořenem** polynomu P_n , jestliže platí $P_n(x) = (x - x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x)$, přičemž $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$;
- výraz $x - x_0$ nazýváme **kořenovým činitelem**.

Kořenové vlastnosti polynomů

- V \mathbb{C} má každý polynom n -tého stupně právě n kořenů (přičemž každý kořen je počítán tolikrát, jaká je jeho násobnost) a platí

$$P_n(x) = a_n(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Jde o tzv. **rozklad polynomu na součin kořenových činitelů**.

- S každým k -násobným kořenem $a + bi$ má polynom také k -násobný kořen $a - bi$.
- Polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.
- Má-li polynom P_n celočíselné koeficienty $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \dots, n$ a
 - kořen $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_0 | a_0$,
 - kořen $x_0 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \Rightarrow p | a_0$, $q | a_n$.

Kořenové vlastnosti polynomů

- Rozklad polynomu v *reálném oboru*:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_r)^{k_r} \cdot ((x - a_1)^2 + b_1^2)^{\ell_1} \cdot \dots \cdot ((x - a_s)^2 + b_s^2)^{\ell_s},$$

kde polynom P_n má reálné kořeny x_1, \dots, x_r násobností k_1, \dots, k_r ,
komplexní kořeny $a_1 \pm b_1 i, \dots, a_s \pm b_s i$ násobností ℓ_1, \dots, ℓ_s
a platí $k_1 + \dots + k_r + 2\ell_1 + \dots + 2\ell_s = n$.

Jde tedy o součin polynomů tvaru

- $(ex + d)^k$, $e \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$
- $(ax^2 + bx + c)^\ell$, $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$, $\ell \in \mathbb{N}$

Příklad 1.6

Najděte reálné kořeny polynomu $f(x)$ a určete jejich násobnost.

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 4)(2x - 1)^3(x^2 + x + 1)(5x^2 + 3)^3$$

Hornerovo schéma

$$P_n(x) = (x - c) \cdot H_{n-1}(x) + d, \quad H_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$$

$$\begin{array}{r|l} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ x = c & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & d = P_n(c) \end{array}$$

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = c \cdot b_{n-1} + a_{n-1}$$

$$b_{n-3} = c \cdot b_{n-2} + a_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$b_0 = c \cdot b_1 + a_1$$

$$d = c \cdot b_0 + a_0 \quad \text{je-li } d = 0 \text{ pak } c \text{ je kořen polynomu } P_n(x)$$

Příklad 1.7

Určete kořeny a rozklad v reálném oboru polynomu $f(x)$.

$$f(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Věta

Na změnu znaménka polynomu mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti.

Příklad 1.8

Určete znaménko polynomu

$$f(x) = x^3(x-2)^5(x-5)^4(x+4)(x-6)^6(x+1)^2(x-3)^7(x^2-x+1)^2(x^2+9)^3.$$

Příklad 1.9

Určete kořeny, rozklad v reálném oboru a znaménko polynomu $f(x)$.

- a) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
 b) $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2$
 c) $f(x) = x^3 - 3x - 2$

Definice

Racionální funkcí $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$ nazýváme podíl dvou nenulových polynomů P_m, Q_n stupňů m, n .

- $m < n \dots$ **ryzí racionální funkce**
- $m \geq n \dots$ **neryzí racionální funkce**

Věta

Každá neryzí racionální funkce je buď polynom nebo ji lze vyjádřit jako součet polynomu a ryzí racionální funkce.

Příklad 1.10

Rozložte racionální funkci $f(x)$ na součet polynomu a ryzí racionální funkce.

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

Věta

Na změnu znaménka racionální funkce $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$, kde polynomy P_m, Q_n nemají společné kořeny, mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti čitatele a jmenovatele.

Příklad 1.11

Určete znaménko funkce $f(x)$.

- a) $f(x) = \frac{(x+2)(x-5)^2(2x^2+1)}{x^4(x-1)^3}$
 b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+1}$

Věta

Každou ryzí racionální funkci $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$ lze rozložit na součet parciálních zlomků.

- V rozkladu Q_n je $(ex + d)^k$, $e \neq 0 \rightarrow$
 \rightarrow v rozkladu $f(x)$ je součet k parciálních zlomků:

$$\frac{C_1}{ex + d} + \frac{C_2}{(ex + d)^2} + \dots + \frac{C_k}{(ex + d)^k}$$

- V rozkladu Q_n je $(ax^2 + bx + c)^\ell$, $a \neq 0, D < 0 \rightarrow$
 \rightarrow v rozkladu $f(x)$ je součet ℓ parciálních zlomků:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_\ell x + B_\ell}{(ax^2 + bx + c)^\ell}$$

Příklad 1.12

Napište obecný tvar rozkladu racionální funkce $f(x)$ na parciální zlomky:

$$f(x) = \frac{2x + 5}{(x + 1)(x - 3)^3(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^2}$$

Příklad 1.13

Rozhodněte, které z racionálních funkcí jsou parciální zlomky.

- | | | |
|----------------------------------|--|-------------------------------------|
| a) $\frac{4}{(x + 2)^3}$ | e) $\frac{2}{3x - 4}$ | i) $\frac{2x - 3}{(3x + 7)^5}$ |
| b) $\frac{5x - 1}{x^2 + 2x + 4}$ | f) $\frac{x^2 + 2x + 3}{(4x^2 + 5)^6}$ | j) $\frac{x}{x^2 + 1}$ |
| c) $\frac{3}{x^2 - 1}$ | g) $\frac{1}{x^2 + x + 1}$ | k) $\frac{2x}{(x^2 + 7)^3}$ |
| d) $\frac{x}{x + 5}$ | h) $\frac{1}{x^3 + 1}$ | l) $\frac{x + 5}{(x^2 + 2x - 3)^4}$ |

Postup při rozkladu racionální funkce na parciální zlomky:

1. Je funkce $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$ ryzí? Pokud není, vydělíme $P_m : Q_n$ a rozkládáme zbytek (RRF).
2. Rozklad jmenovatele Q_n na součin v \mathbb{R} .
3. Obecný tvar (schéma) rozkladu.
4. Výpočet neurčitých koeficientů (konstant).

Příklad 1.14

Rozložte funkci $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 6}$ na parciální zlomky.

Příklad 1.15



Určete znaménko funkce $f(x)$ a rozložte ji na parciální zlomky, resp. na součet polynomu s parciálními zlomky.

a) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^4 + 3x^2}$

b) $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$