

BAA101 – Matematika 1

3. Determinanty

3.1 Definice determinantu

3.2 Vlastnosti determinantů

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Novotný, Jiří: *Matematika I, Modul 1, Základy lineární algebry*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-748-2

3.1 Definice determinantu

Definice

Determinant n -tého řádu je schéma tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

kterému je přiřazena (jednoznačně určená) hodnota (číslo).

Stručný zápis: $|A| = |a_{ij}|$, kde $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n .

3.1 Definice determinantu

Determinant 1. řádu:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Determinant 2. řádu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Křížové pravidlo

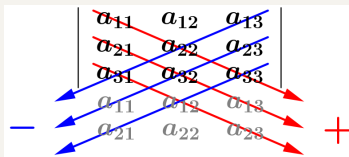
Determinant 3. řádu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

Sarrusovo pravidlo



Poznámky:

- Sarrusovo pravidlo lze použít pouze pro výpočet determinantů 3. řádu.
- Pro výpočet determinantů 4. a vyšších řádů využíváme úpravy determinantů a Laplaceův rozvoj (viz kapitola 3.2).

Vlastnosti determinantů

- Je-li determinant ve schodovitém tvaru, pak je jeho hodnota rovna součinu prvků na hlavní diagonále.
- Determinant je roven nule, jestliže
 - obsahuje nulový řádek (sloupec),
 - obsahuje dva stejné řádky (sloupce),
 - některý řádek (sloupec) je roven k -násobku jiného řádku (sloupce).

Úpravy determinantů

- které nemění hodnotu determinantu:
 1. Výměna řádků za sloupce (transponování).
 2. Přičtení k -násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupce).
- které mění hodnotu determinantu:
 3. Záměna dvou řádků (sloupců) změní znaménko determinantu.
 4. Vynásobíme-li některý řádek (sloupec) determinantu číslem k , je hodnota nově vzniklého determinantu rovna k -násobku hodnoty původního determinantu.

Definice

Subdeterminant A_{ij} přidružený k prvku a_{ij} je determinant, který vznikne z determinantu $|A| = |a_{ij}|$ vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce, tj. řádku a sloupce, ve kterém leží prvek a_{ij} .

Definice

Algebraický doplněk $\bar{A}_{ij}$ prvku a_{ij} :

$$\bar{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$$

Věta (Laplaceův rozvoj)

Determinant je roven součtu součinů prvků libovolného, ale pevně zvoleného, řádku (sloupce) s příslušnými algebraickými doplňky.

$$|A| = \sum_j a_{ij} \bar{A}_{ij} = \sum_i a_{ij} \bar{A}_{ij}$$

$$|A| = \underbrace{\sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}}_{\text{podle řádku}} = \underbrace{\sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}}_{\text{podle sloupce}}$$

Příklad 3.1

Vypočtete determinant

- a) pomocí Laplaceova rozvoje
- b) pomocí úpravy na chodovitý tvar
- c) pomocí Sarrusova pravidla

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 19 \end{vmatrix}$$

Příklad 3.2

Vypočtete determinant

- a) pomocí úpravy na chodovitý tvar
- b) pomocí úprav a Laplaceova rozvoje

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Věta

Čtvercová matice A je

- regulární $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.
- singulární $\Leftrightarrow |A| = 0$.

Platí

A, B jsou čtvercové matice řádu n ; $k, \ell \in \mathbb{R}$

1. $A = B \Rightarrow |A| = |B|$
2. $|kA| = k^n |A|$
3. $|A^T| = |A|$
4. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
5. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$