

BAA001 Matematika 1

1. REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

1.5 Složená funkce

1.6 Inverzní funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018.
ISBN: 978-80-7204-982-0

$$\begin{array}{l} f : y = f(u) \\ g : u = g(x) \end{array} \longrightarrow f \circ g : y = f(g(x))$$

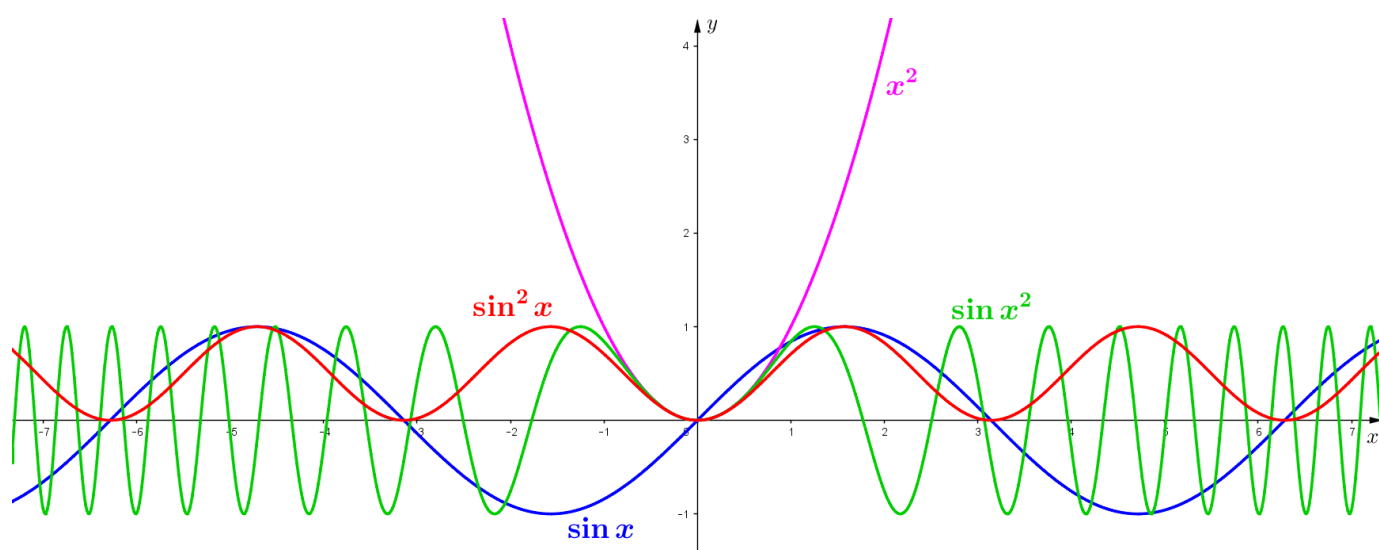
$f \circ g$... **složená funkce**

f ... **vnější složka** složené funkce

g ... **vnitřní složka** složené funkce

$$\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = \sin x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(x^2) = \sin x^2 \end{array} \quad \dots \text{není totéž!}$$

\Rightarrow Záleží na pořadí, v jakém funkce skládáme!



Poznámka: $\sin^2 x = \frac{1}{2} \left[1 + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right]$

Příklad 1.2

Určete definiční obor funkce f .

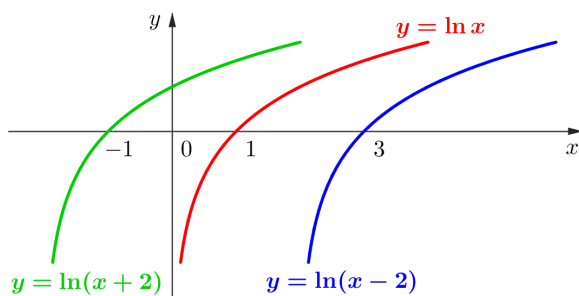
a) $f : y = \sqrt{\sin x}$

b) $f : y = \log_3(4 - x^2)$

1.5 Složená funkce → Transformace grafu funkce

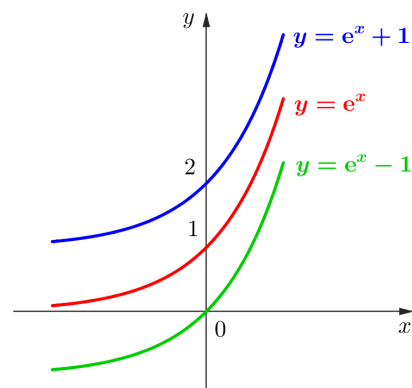
Posunutí ve směru osy x :

$$y = f(x \pm a), \quad a \in \mathbb{R}^+$$

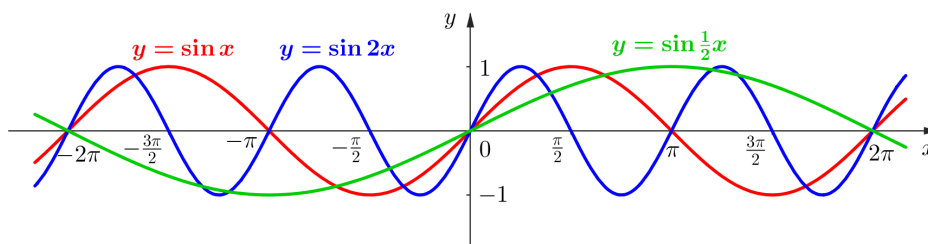


Posunutí ve směru osy y :

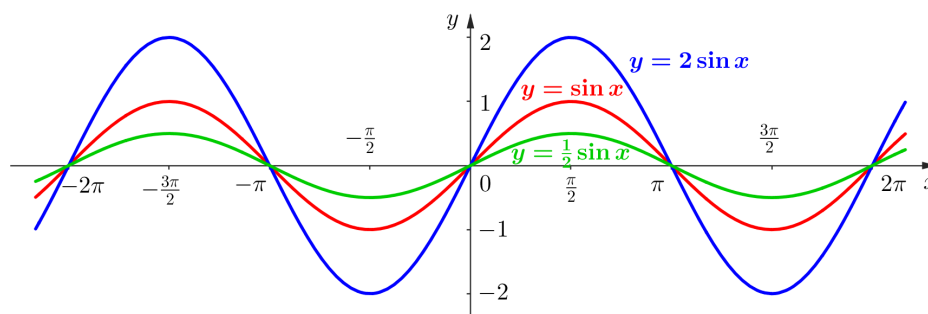
$$y = f(x) \pm a, \quad a \in \mathbb{R}^+$$



Stlačení / roztažení ve směru osy x : $y = f(ax)$, $a \in \mathbb{R}^+$

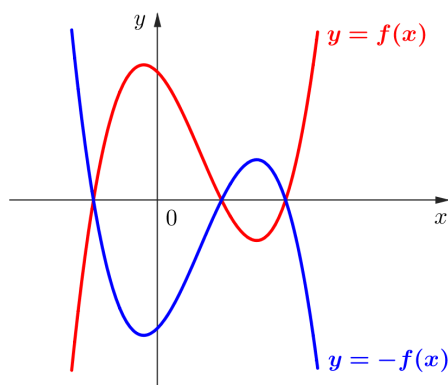


Stlačení / roztažení ve směru osy y : $y = af(x)$, $a \in \mathbb{R}^+$



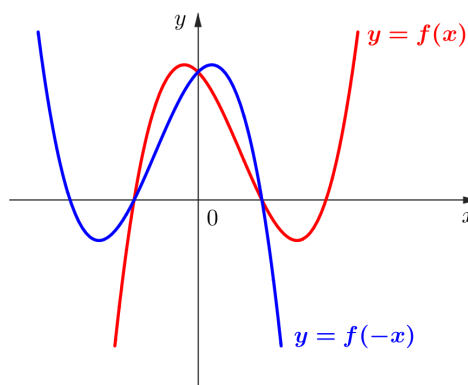
Překlopení podle osy x :

$$y = -f(x)$$



Překlopení podle osy y :

$$y = f(-x)$$



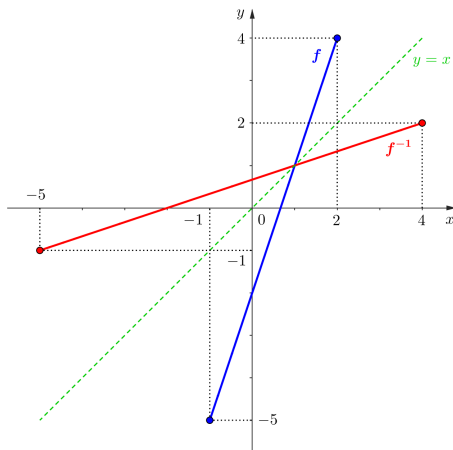
$f : y = 3x - 2, x \in \langle -1, 2 \rangle$... úsečka mezi body $[-1, -5]$ a $[2, 4]$

↓ zaměníme proměnné x a y

$$x = 3y - 2$$

↓ vyjádříme proměnnou y

$f^{-1} : y = \frac{x + 2}{3}, x \in \langle -5, 4 \rangle$... úsečka mezi body $[-5, -1]$ a $[4, 2]$



f^{-1} ... inverzní funkce k funkci f

Definice

Je-li f **prostá** funkce v $D(f)$, pak k ní existuje **inverzní funkce** f^{-1} definovaná na $H(f)$, přičemž platí

$$[x, y] \in \text{Gr } f \iff [y, x] \in \text{Gr } f^{-1}$$

Platí

- $D(f^{-1}) = H(f), H(f^{-1}) = D(f)$
- $f(f^{-1}(x)) = x, x \in D(f^{-1})$ a $f^{-1}(f(x)) = x, x \in D(f)$
- $(f^{-1})^{-1} = f$

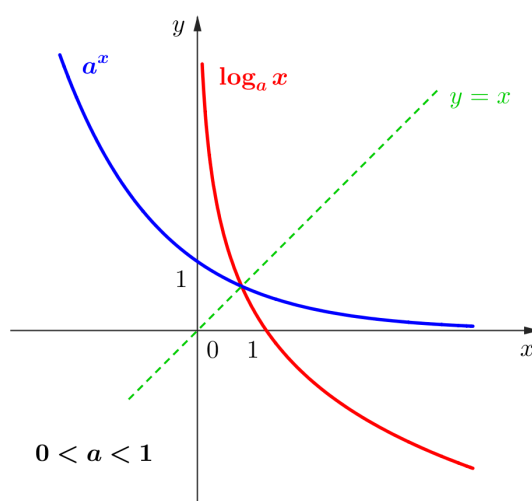
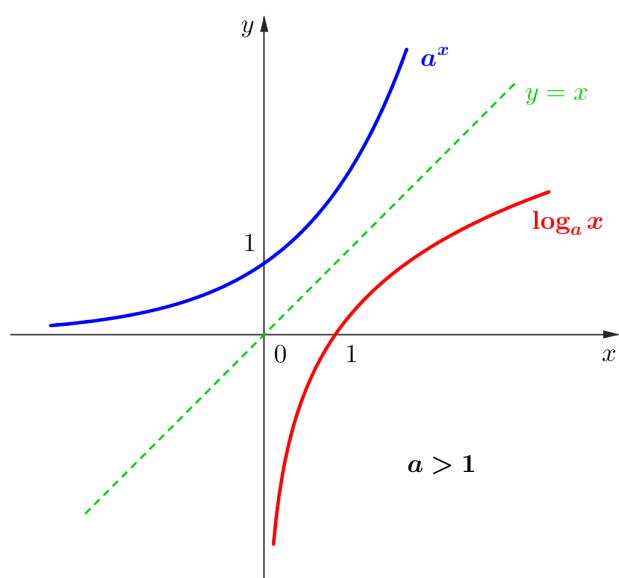
Platí

- Je-li funkce f rostoucí/klesající, pak je také f^{-1} rostoucí/klesající.
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle osy I. a III. kvadrantu (tj. přímky $y = x$).

Výpočet inverzní funkce f^{-1} z funkce f :

1. V zápisu funkce $y = f(x)$ zaměníme x a y , čímž dostaneme $x = f(y)$.
2. Z rovnice $x = f(y)$ vyjádříme y a máme předpis $y = f^{-1}(x)$.

1.6 Inverzní funkce

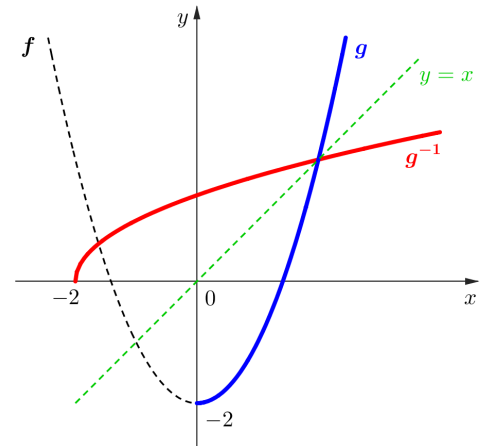


$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a^x = x$$

Poznámka: Potřebujeme-li najít inverzní funkci k funkci f , která není prostá na celém $D(f)$, je třeba nejprve funkci f omezit na interval, na němž je prostá.

$$\begin{aligned}
 f : y &= x^2 - 2, \quad D(f) = \mathbb{R} \\
 &\text{není prostá} \\
 \downarrow \\
 g : y &= x^2 - 2, \quad D(g) = \langle 0, \infty \rangle \\
 &\text{je prostá} \\
 \downarrow \\
 g^{-1} : y &= \sqrt{x + 2}, \quad D(g^{-1}) = \langle -2, \infty \rangle
 \end{aligned}$$



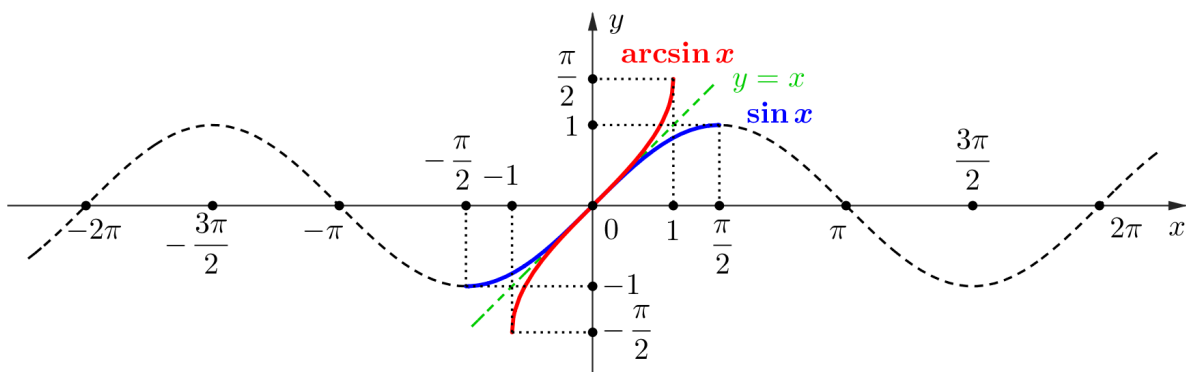
1.6 Inverzní funkce → Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce

– funkce inverzní ke goniometrickým funkcím

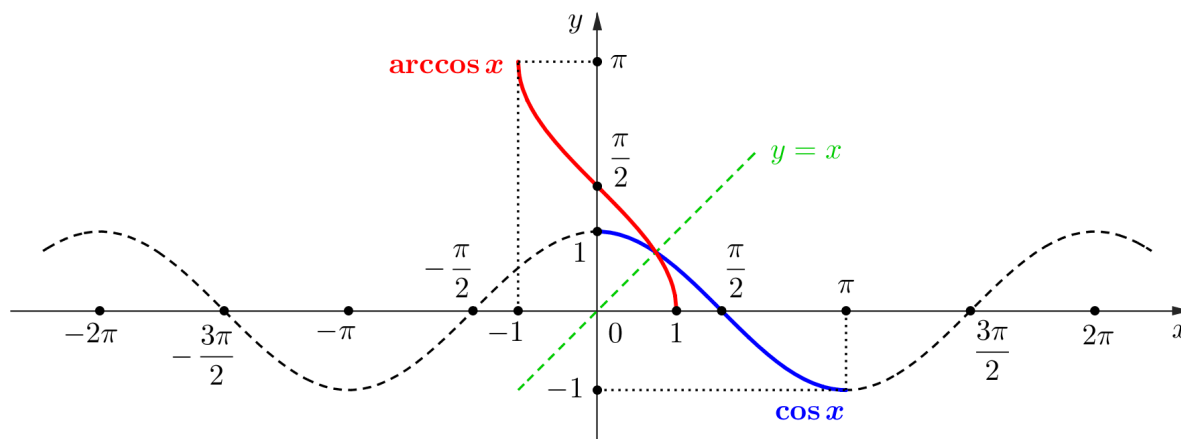
Arkussinus $y = \arcsin x$

$$\blacksquare D(f) = \langle -1, 1 \rangle, \quad H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$



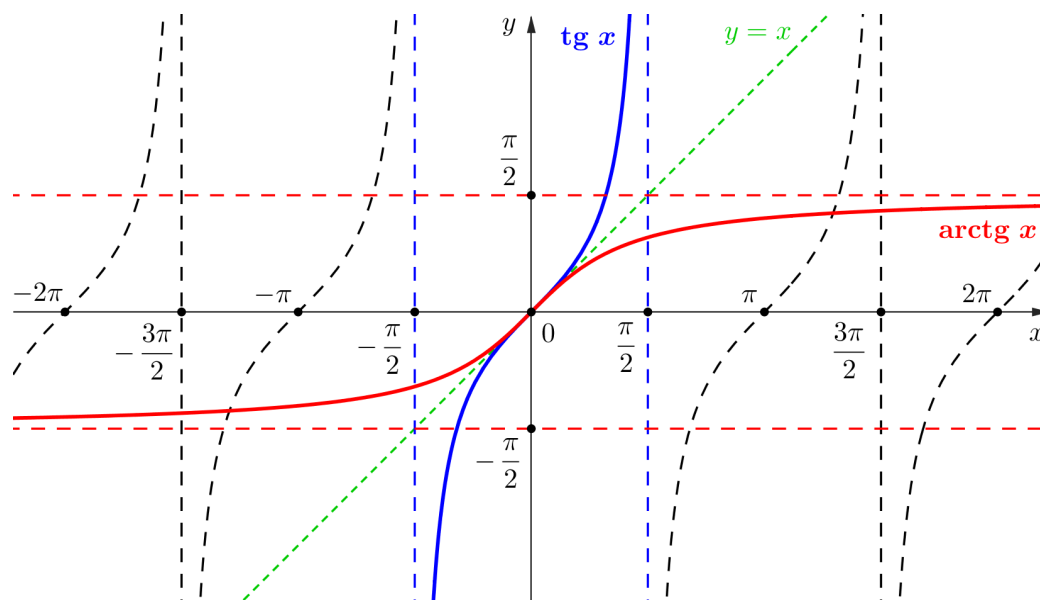
Arkuskosinus $y = \arccos x$

- $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(f) = \langle 0, \pi \rangle$



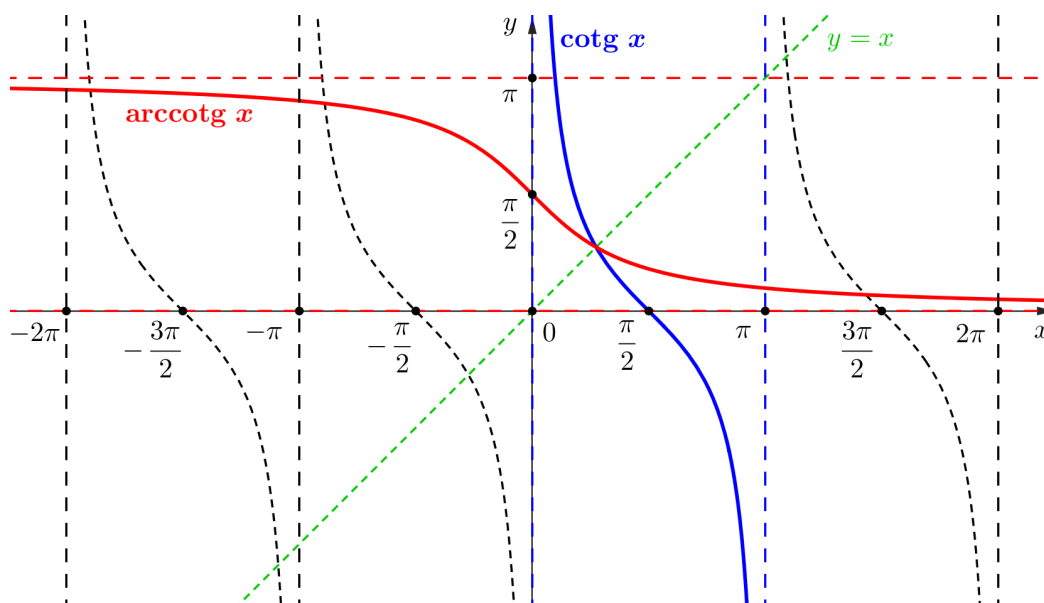
Arkustangens $y = \operatorname{arctg} x$

- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Arkuskotangens $y = \operatorname{arccotg} x$

- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \pi)$



x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Příklad 1.3

Určete inverzní funkci f^{-1} k funkci f a definiční obor funkcí f a f^{-1} .

a) $f : y = e^{2x-1}$

b) $f : y = \arcsin(1 - x)$