FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika 1

1. REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

1.5 Složená funkce

1.6 Inverzní funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

1.5 Složená funkce

FAST

$$\begin{array}{l} f : y = f(u) \\ g : u = g(x) \end{array} \longrightarrow \quad f \circ g : y = f(g(x))$$

$f \circ g$ ... **složená funkce**

f ... **vnější složka** složené funkce

g ... **vnitřní složka** složené funkce

$$\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = \sin x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(x^2) = \sin x^2 \end{array}$$ ... *není totéž!*

$\Rightarrow$ Záleží na pořadí, v jakém funkce skládáme!

1.5 Složená funkce

Příklad

Určete definiční obor funkce f.

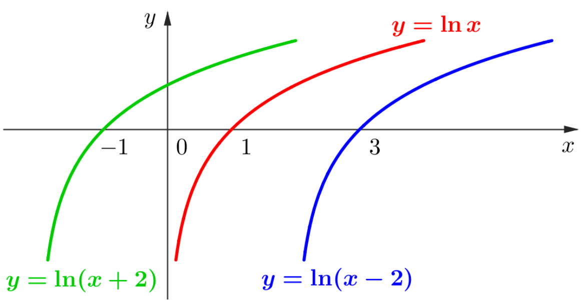
a) $f: y = \sqrt{\sin x}$

b) $f: y = \log_3(4 - x^2)$

1.5 Složená funkce → Transformace grafu funkce

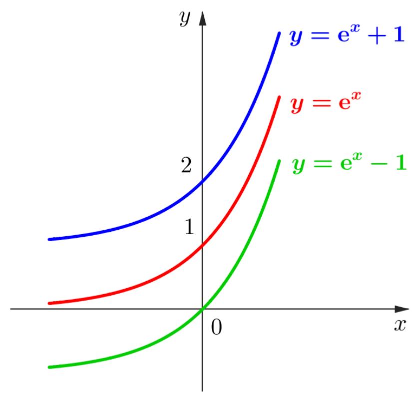
Posunutí ve směru osy x:

$$\boldsymbol{y = f(x \pm a)},\ a \in \mathbb{R}^+$$

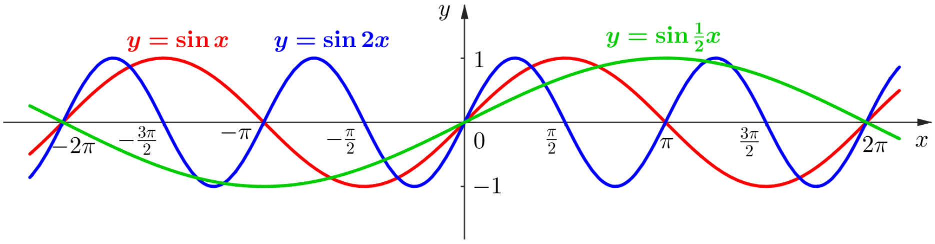


Posunutí ve směru osy y:

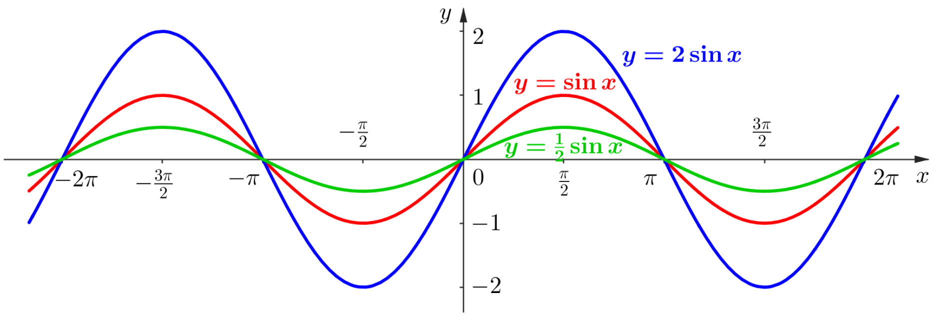
$$\boldsymbol{y = f(x) \pm a},\ a \in \mathbb{R}^+$$



Stlačení / roztažení ve směru osy x: $y = f(ax)$, $a \in \mathbb{R}^+$

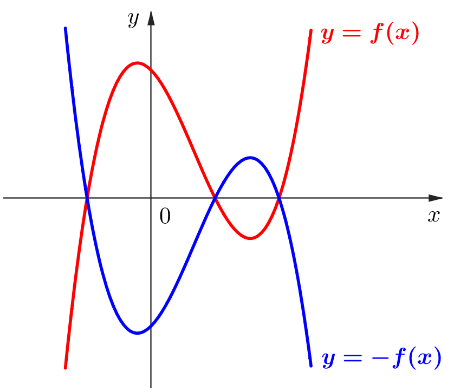


Stlačení / roztažení ve směru osy y: $y = af(x)$, $a \in \mathbb{R}^+$



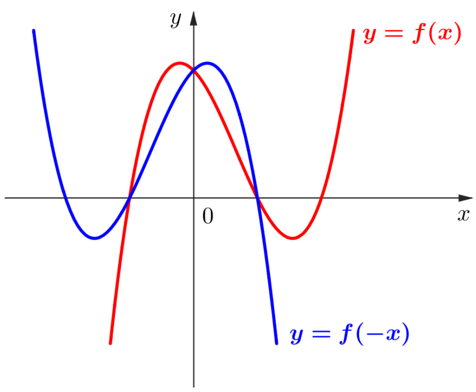
Překlopení podle osy x:

$$y = -f(x)$$



Překlopení podle osy y:

$$y = f(-x)$$



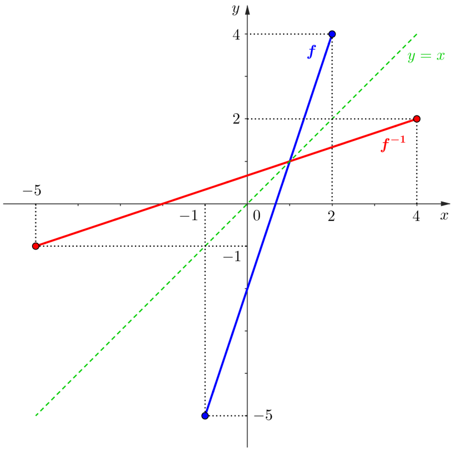
$$f: y = 3x - 2, \quad x \in \langle -1, 2 \rangle \quad \ldots \text{ úsečka mezi body } [-1, -5] \text{ a } [2, 4]$$

$\downarrow$ zaměníme proměnné x a y

$$x = 3y - 2$$

$\downarrow$ vyjádříme proměnnou y

$$f^{-1}: y = \frac{x+2}{3}, \quad x \in \langle -5, 4 \rangle \quad \ldots \text{ úsečka mezi body } [-5, -1] \text{ a } [4, 2]$$



$f^{-1} \ldots$ inverzní funkce k funkci f

Definice

Je-li f **prostá** funkce v $D(f)$, pak k ní existuje **inverzní funkce f^{-1}** definovaná na $H(f)$, přičemž platí

$$[x, y] \in \mathrm{Gr}\, f \iff [y, x] \in \mathrm{Gr}\, f^{-1}$$

Platí

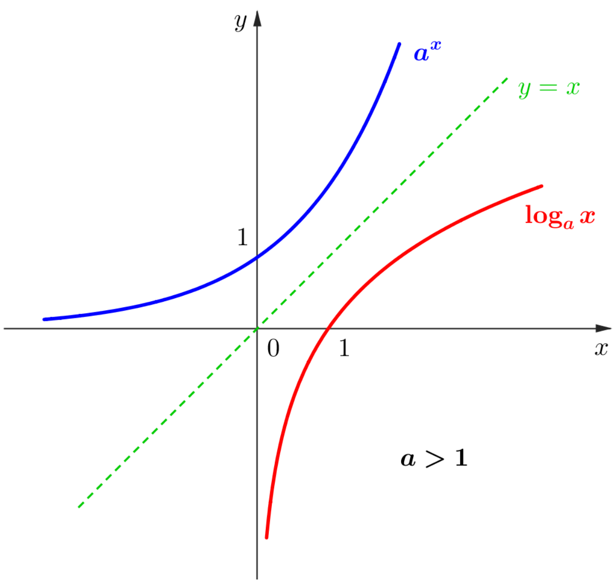
- $\boldsymbol{D(f^{-1}) = H(f)}, \ \boldsymbol{H(f^{-1}) = D(f)}$
- $\boldsymbol{f(f^{-1}(x)) = x}, \ x \in D(f^{-1})$ a $\boldsymbol{f^{-1}(f(x)) = x}, \ x \in D(f)$
- $\boldsymbol{(f^{-1})^{-1} = f}$

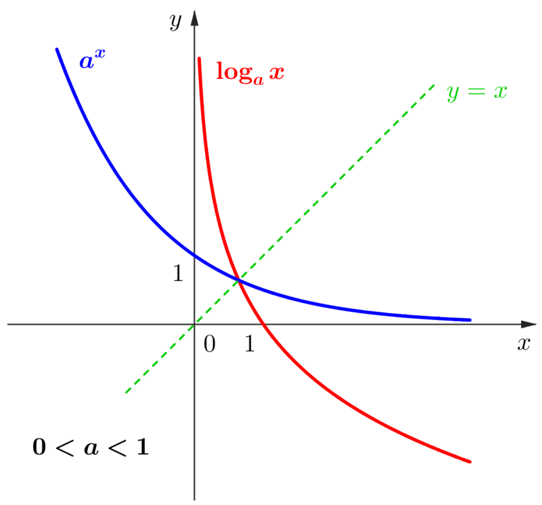
Platí

- Je-li funkce f rostoucí/klesající, pak je také f^{-1} rostoucí/klesající.
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle osy I. a III. kvadrantu (tj. přímky $y = x$).

Výpočet inverzní funkce f^{-1} z funkce f:

1. V zápisu funkce $y = f(x)$ zaměníme x a y, čímž dostaneme $x = f(y)$.
2. Z rovnice $x = f(y)$ vyjádříme y a máme předpis $y = f^{-1}(x)$.





$$a^{\log_a x} = x$$
$$\log_a a^x = x$$

Poznámka: Potřebujeme-li najít inverzní funkci k funkci f, která není prostá na celém $D(f)$, je třeba nejprve funkci f omezit na interval, na němž je prostá.

$f : y = x^2 - 2,\ D(f) = \mathbb{R}$

není prostá

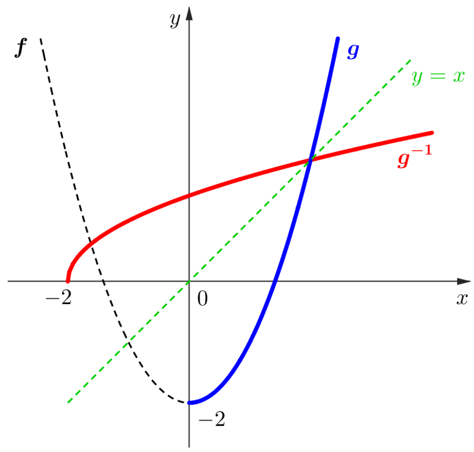
$\downarrow$

$g : y = x^2 - 2,\ D(g) = \langle 0, \infty)$

je prostá

$\downarrow$

$g^{-1} : y = \sqrt{x+2},\ D(g^{-1}) = \langle -2, \infty)$

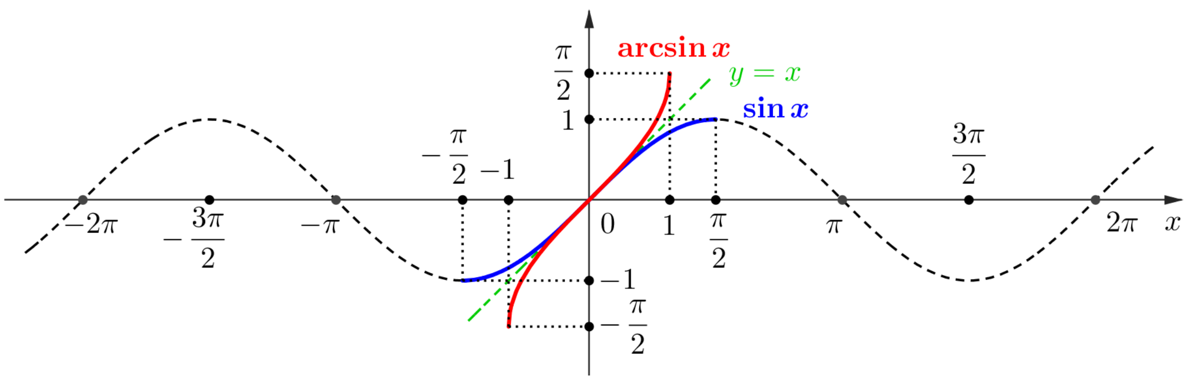


Cyklometrické funkce

– funkce inverzní ke goniometrickým funkcím

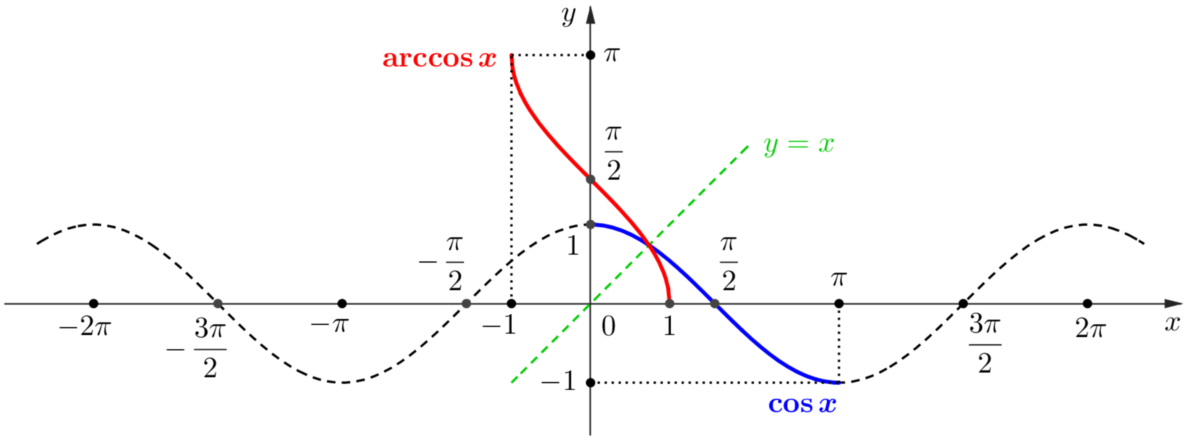
Arkussinus $\boldsymbol{y = \arcsin x}$

- $D(f) = \langle -1, 1 \rangle,\ \ H(f) = \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$



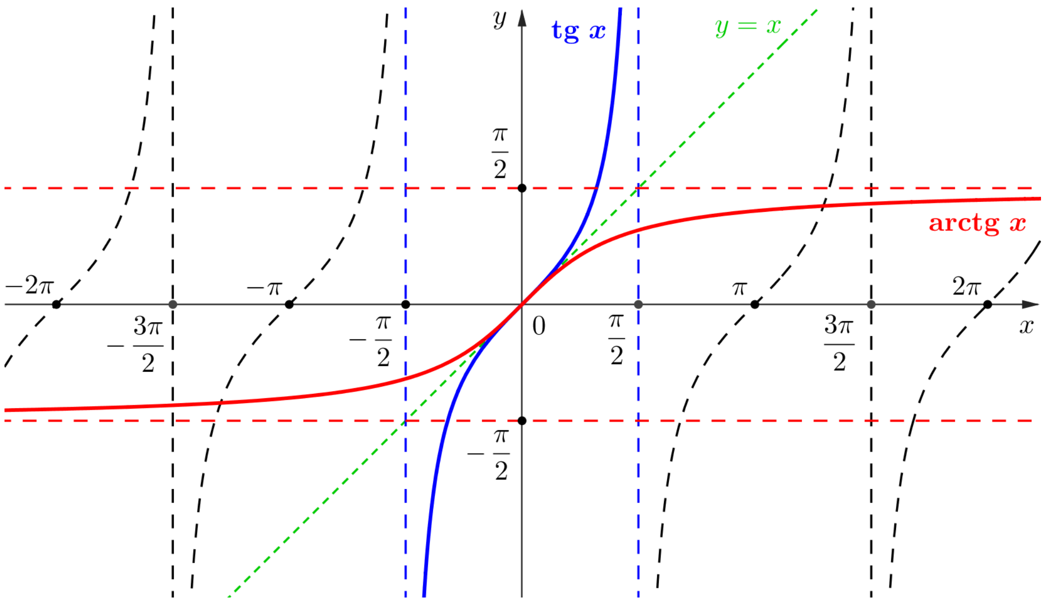
Arkuskosinus $y = \arccos x$

- $D(f) = \langle -1, 1\rangle, \quad H(f) = \langle 0, \pi\rangle$



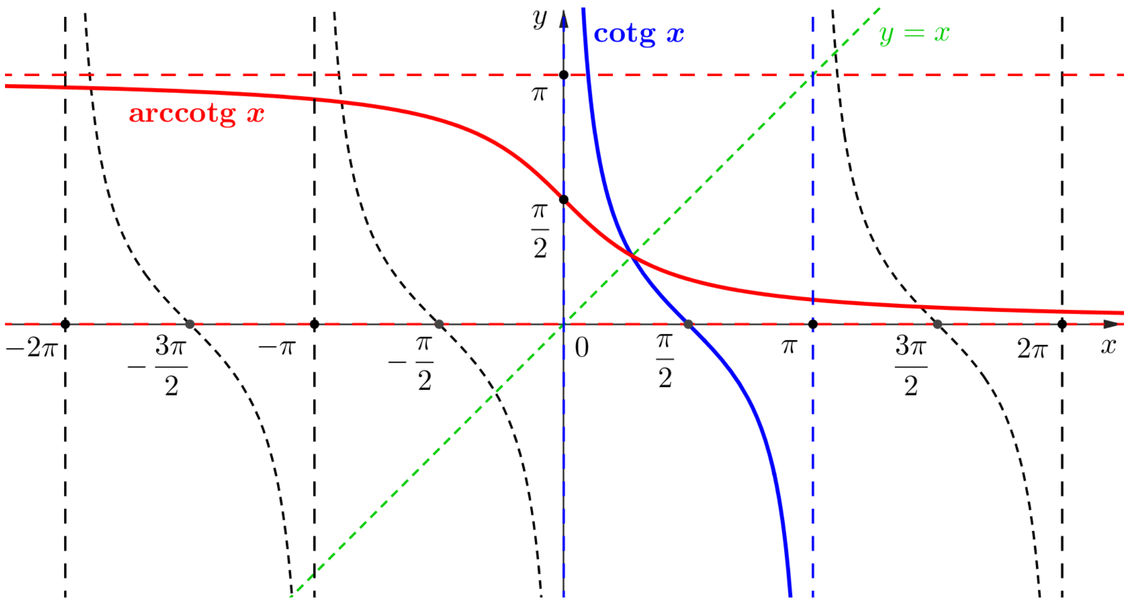
Arkustangens $y = \operatorname{arctg} x$

- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Arkuskotangens $y = \operatorname{arccotg} x$

- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = (0, \pi)$



x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Příklad

Určete inverzní funkci f^{-1} k funkci f a definiční obor funkcí f a f^{-1}.

a) $f : y = \mathrm{e}^{2x-1}$

b) $f : y = \arcsin(1-x)$

DĚKUJI
ZA
POZORNOST!