

2. Soustavy lineárních rovnic

- 2.1 Soustavy lineárních rovnic
- 2.2 Gaussova eliminační metoda

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Novotný, Jiří: *Matematika I, Modul 1, Základy lineární algebry*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-748-2

2.1 Soustavy lineárních rovnic

Definice

Soustava m **lineárních rovnic** o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ má tvar

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$... **koefficienty**

$b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$... **absolutní členy**

$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$... **homogenní soustava**

alespoň jedno $b_i \neq 0$... **nehomogenní soustava**

2.1 Soustavy lineárních rovnic

Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy

$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Vektor neznámých

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Soustavu můžeme psát v maticovém tvaru $A \cdot X = B$.

Definice

Uspořádanou n -tici čísel $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazýváme **řešením** soustavy $A \cdot X = B$, jestliže po dosazení x_1 za x_1 , x_2 za x_2 , $\dots$, x_n za x_n do $A \cdot X = B$ dostaneme m identit.

Frobeniova věta



Soustava lineárních rovnic $A \cdot X = B$

- má řešení $\Leftrightarrow h(A) = h(A_r) = h$
 - $h = n$... právě jedno řešení
 - $h < n$... nekonečně mnoho řešení,
 $n - h$ neznámých volíme jako parametry
- nemá řešení $\Leftrightarrow h(A) \neq h(A_r)$, tj. $h(A_r) = h(A) + 1$

Poznámka

Homogenní soustava má vždy řešení, neboť $h(A) = h(A_r)$ platí vždy.

- $h(A) = n$... jedno **nulové (triviální) řešení** $X = (0, 0, \dots, 0)$
- $h(A) < n$... nekonečně mnoho řešení,
která závisí na $n - h$ parametrech

Rozšířenou matici soustavy $A \cdot X = B$ upravíme na schodovitý tvar.



Dostaneme rozšířenou matici nové „jednodušší“ soustavy, která má stejnou množinu řešení, jako soustava původní.

Příklad 2.1

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavy. Podle Frobeniovovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

a)
$$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 3x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y - 2z - 5v &= 0 \\ 2x - y - 4z &= 0 \\ 3x - 4y - 6z + 5v &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - z &= 5 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

Příklad 2.2



Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavy. Podle Frobeniovovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

a)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= -2 \\ 3x + 6y - 3z &= 0 \\ -2x - 4y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 5x - 3y - 7z - 4v &= 7 \\ x + y - 3z + 4v &= 3 \\ 3x - 5y - z - 12v &= 1 \\ x - 3y + z - 8v &= -1 \end{aligned}$$

Příklad 2.3

Udejte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která:

- a) má právě jedno řešení;
- b) má nekonečně mnoho řešení;
- c) nemá řešení.