



BAA101 – Matematika 1

2. Soustavy lineárních rovnic

2.1 Soustavy lineárních rovnic

2.2 Gaussova eliminační metoda

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura



Novotný, Jiří: *Matematika I, Modul 1, Základy lineární algebry*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-748-2

Definice

Soustava m **lineárních rovnic** o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ má tvar

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$... **koefficienty**

$b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$... **absolutní členy**

$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$... **homogenní soustava**

alespoň jedno $b_i \neq 0$... **nehomogenní soustava**

Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy

$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Vektor neznámých

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Soustavu můžeme psát v maticovém tvaru $A \cdot X = B$.

Definice

Uspořádanou n -tici čísel $X = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ nazýváme **řešením** soustavy $A \cdot X = B$, jestliže po dosazení r_1 za x_1 , r_2 za x_2 , $\dots$, r_n za x_n do $A \cdot X = B$ dostaneme m identit.

Frobeniova věta



Soustava lineárních rovnic $A \cdot X = B$

- má řešení $\Leftrightarrow h(A) = h(A_r) = h$
 - $h = n$... právě jedno řešení
 - $h < n$... nekonečně mnoho řešení,
 $n - h$ neznámých volíme jako parametry
- nemá řešení $\Leftrightarrow h(A) \neq h(A_r)$, tj. $h(A_r) = h(A) + 1$

Poznámka

Homogenní soustava má vždy řešení, neboť $h(A) = h(A_r)$ platí vždy.

- $h(A) = n$... jedno **nulové (triviální) řešení** $X = (0, 0, \dots, 0)$
- $h(A) < n$... nekonečně mnoho řešení, která závisejí na $n - h$ parametrech

2.2 Gaussova eliminační metoda

Rozšířenou matici soustavy $A \cdot X = B$ upravíme na schodovitý tvar.



Dostaneme rozšířenou matici nové „jednodušší“ soustavy, která má stejnou množinu řešení, jako soustava původní.

Příklad 2.1

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavy. Podle Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

a)
$$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 3x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y - 2z - 5v &= 0 \\ 2x - y - 4z &= 0 \\ 3x - 4y - 6z + 5v &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - z &= 5 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

Příklad 2.2



Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavy. Podle Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

a)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= -2 \\ 3x + 6y - 3z &= 0 \\ -2x - 4y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 5x - 3y - 7z - 4v &= 7 \\ x + y - 3z + 4v &= 3 \\ 3x - 5y - z - 12v &= 1 \\ x - 3y + z - 8v &= -1 \end{aligned}$$

Příklad 2.3

Udejte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která:

- a) má právě jedno řešení;
- b) má nekonečně mnoho řešení;
- c) nemá řešení.