

BAA101 – Matematika 1

1. Matice

1.1 Matice

1.2 Operace s maticemi

1.3 Hodnost matice

1.4 Inverzní matice

1.5 Maticové rovnice

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Novotný, Jiří: *Matematika I, Modul 1, Základy lineární algebry*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-748-2

1.1 Matice

Definice

Matice typu (m, n) , kde $m, n \in \mathbb{N}$ je uspořádaná soustava $m \cdot n$ čísel zapsaných ve tvaru tabulky do m řádků a n sloupců.

Matici typu (m, n) zapisujeme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \dots$ **prvky matice**

$a_{ij} \dots$ prvek ležící v i -tém řádku a j -tém sloupci

– $i \dots$ **řádkový index**

– $j \dots$ **sloupcový index**

1.1 Matice

Stručný zápis: $A, (a_{ij}), (a_{ij})_m^n$

$m \neq n \dots$ **obdélníková matice**

$m = n \dots$ **čtvercová matice n -tého řádu**

• $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \dots$ **hlavní diagonála**

• $a_{n1}, a_{2,n-2}, \dots, a_{n1} \dots$ **vedlejší diagonála**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Speciální matice

■ Jednotková matice

- vždy čtvercová

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{pro } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad \dots \quad \begin{array}{l} \text{na hlavní diagonále jsou jedničky} \\ \text{mimo hlavní diagonálu jsou nuly} \end{array}$$

- značíme E

$$\text{■ např.: } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

■ Nulová matice

- $a_{ij} = 0 \dots$ všechny prvky jsou rovny nule

- značíme O

$$\text{■ např.: } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ Řádková matice (řádkový vektor)

- matice typu $(1, n)$

- např.: $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$

■ Sloupcová matice (sloupcový vektor)

- matice typu $(m, 1)$

$$\text{■ např.: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.2 Operace s maticemi

1) Rovnost matic

$$A = (a_{ij})_m^n, \quad B = (b_{ij})_m^n$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

(Prvky na stejných místech se rovnají.)

2) Součet matic

$$A = (a_{ij})_m^n, \quad B = (b_{ij})_m^n, \quad C = (c_{ij})_m^n$$

$$A + B = C \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

(Sčítáme prvky na stejných místech.)

1.2 Operace s maticemi

3) Násobení matice číslem k (k -násobek matice)

$$A = (a_{ij})_m^n, \quad C = (c_{ij})_m^n$$

$$kA = C \Leftrightarrow ka_{ij} = c_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

(Číslem k vynásobíme všechny prvky matice A .)

4) Rozdíl matic

$$A = (a_{ij})_m^n, \quad B = (b_{ij})_m^n$$

$$A - B = A + (-B)$$

kde $-B = (-1) \cdot B \dots$ opačná matice k matici B

(Odečítáme prvky na stejných místech.)

Příklad 1.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

VypočtĚte:

- $A + B$
- $A - B$
- $2A$

Platí

A, B, C, O jsou matice téhož typu; $k, \ell \in \mathbb{R}$

1. $A + B = B + A$ (komutativní zákon)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativní zákon)
3. $A + O = A$
4. $A + (-A) = O$
5. $1 \cdot A = A$
6. $k(\ell A) = (k\ell)A$ (asociativní zákon pro násobení číslem)
7. $(k + \ell)A = kA + \ell A$ (1. distributivní zákon pro násobení matice číslem)
8. $k(A + B) = kA + kB$ (2. distributivní zákon pro násobení matice číslem)

5) Součin matic

$$A = (a_{ij})_m^n, \quad B = (b_{jk})_n^p, \quad C = (c_{ik})_m^p$$

$$A \cdot B = C \Leftrightarrow c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

$$\text{pro } i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$i\text{-tý řádek} \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & b_{1k} & \vdots \\ \vdots & b_{2k} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nk} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & c_{ik} & \cdots \end{pmatrix} i\text{-tý řádek}$$

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Příklad 1.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vypočtete:

- a) $A \cdot B$
- b) $B \cdot A$

Poznámka: Násobení matic obecně není komutativní, tj. obecně **neplatí**

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Definice

Čtvercové matice A, B řádu n se nazývají **zaměnitelné (komutativní)**, jestliže platí $A \cdot B = B \cdot A$.

Platí

A, O, E – čtvercové matice řádu n

$$1. A \cdot O = O \cdot A = O$$

$$2. A \cdot E = E \cdot A = A$$

Platí

A, B, C – matice vhodných typů; $k \in \mathbb{R}$

$$1. (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad (\text{asociativní zákon})$$

$$2. k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB) \quad (\text{asociativní zákon pro násobení součinu matic číslem})$$

$$3. (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad (1. \text{ distributivní zákon})$$

$$4. A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (2. \text{ distributivní zákon})$$

6) Mocnina matice

$$A^0 = E$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

$$\vdots$$

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$$

7) Transponování matice

$$A = (a_{ij})_m^n$$

$$A \rightarrow A^T \quad \dots \quad a_{ij} = a_{ji}^T$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

(Zaměníme řádky za sloupce.)

– A^T je typu (n, m) ... **transponovaná matice** k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1.2 Operace s maticemi



Platí

A, B, C – matice vhodných typů; $k \in \mathbb{R}$

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$
4. $(kA)^T = kA^T$

1.3 Hodnost matice



Definice

Hodnost matice A je celé nezáporné číslo, udávající maximální počet lineárně nezávislých řádků / sloupců matice A .
Značíme $h(A)$.

Platí:

A je matice typu (m, n) , O je nulová matice

- $0 \leq h(A) \leq \min(m, n)$
- $h(O) = 0$
- $h(A^T) = h(A)$

1.3 Hodnost matice



Elementární úpravy matice

1. Výměna řádků / sloupců.
2. Vynásobení řádku / sloupce nenulovým číslem.
3. Přičtení k -násobku jednoho řádku / sloupce k ℓ -násobku jiného řádku / sloupce.

Věta

Elementární úpravy nemění hodnost matice.

Poznámka:

1. Pokud upravujeme jen řádky, hovoříme o řádkových úpravách, analogicky zavádíme sloupcové úpravy.
2. Jestliže matice B vznikla elementární úpravou matice A , používáme pro označení vztahu mezi nimi značku $A \sim B$.

1.3 Hodnost matice



Každou nenulovou matici lze pomocí elementárních úprav převést na **schodovitou matici** téhož typu (m, n) .

Schodovitá matice

- každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí ($\Rightarrow$ výška schodu = jeden řádek)
- $h(A) =$ počet nenulových řádků

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá

- **regulární**, jestliže $h(A) = n$
- **singulární**, jestliže $h(A) < n$
 $\rightarrow$ číslo $n - h(A)$ nazýváme **defekt (nulita)** matice A

Příklad 1.3

Určete hodnost matice

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Definice

Nechť A je čtvercová matice. Existuje-li matice A^{-1} taková, že platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

kde E je jednotková matice, nazýváme A^{-1} **inverzní matice** k matici A .

Věta

Inverzní matice k matici A existuje právě tehdy, když matice A je regulární.

Věta

Nechť A je regulární matice. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.

Platí

A, B jsou regulární matice stejného řádu, $k \neq 0$ je reálné číslo.

1. $E^{-1} = E$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
4. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
5. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Výpočet inverzní matice: **Jordanova metoda**

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \end{array} \right) \xrightarrow{\text{elementární řádkové úpravy}} \left(\begin{array}{c|c} E & A^{-1} \end{array} \right)$$

Příklad 1.4

Vypočtěte inverzní matici k matici A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení maticové rovnice o jedné neznámé matici X má dvě části:

1. Z maticové rovnice osamostatníme neznámou matici X .
2. Neznámou matici X vypočítáme.

Příklad 1.5

Z maticové rovnice osamostatněte neznámou matici X .

$$X \cdot A - 2B = C$$

Příklad 1.6



Řešte maticovou rovnici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 1.7



Řešte soustavu maticových rovnic.

$$\begin{aligned} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y &= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$