

BAA001 Matematika 1

1. REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

1.1 Funkce a její graf

1.2 Základní vlastnosti funkcí

1.3 Elementární funkce

1.4 Parametrické zadání funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Definice

Řekneme, že **funkčním předpisem** $y = f(x)$ je určena **reálná funkce f jedné reálné proměnné x** , jestliže

- je dán obor $A \subset \mathbb{E}_1$ „přípustných“ reálných hodnot nezávisle proměnné x ;
- každému $x \in A$ je přiřazena **právě jedna** reálná hodnota závisle proměnné y podle funkčního předpisu $y = f(x)$.

$y = f(x)$... **explicitní zadání**

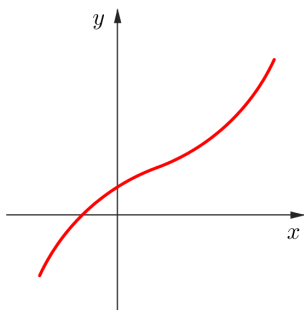
$A = D(f)$... **definiční obor**

Pokud není definiční obor zadán, bereme **přirozený definiční obor** = množina všech reálných čísel, pro které má funkční předpis $y = f(x)$ smysl.

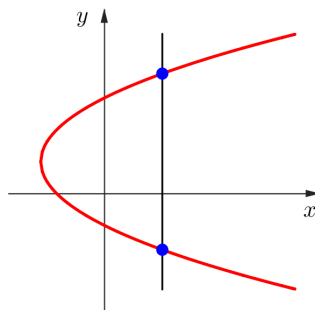
$f(A) = H(f)$... **obor funkčních hodnot**

Graf funkce

- Znázornění funkce
- $\text{Gr } f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \in D(f), y = f(x)\}$
- Každá rovnoběžka s osou y protne graf funkce nejvýše v jednom bodě.



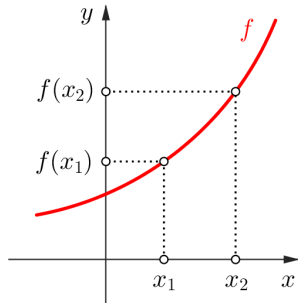
je graf funkce



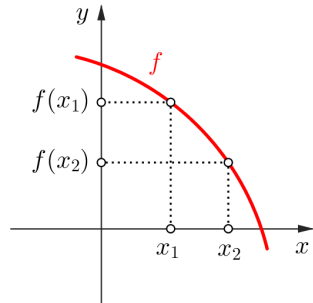
není graf funkce

Funkce f je na množině $M \subseteq D(f)$

- **rostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **klesající** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



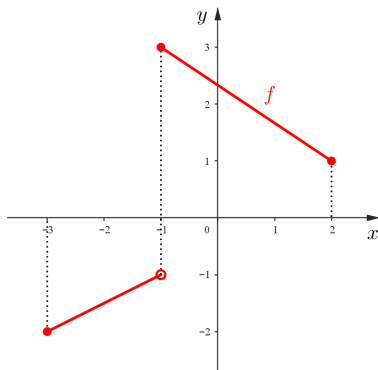
Rostoucí funkce



Klesající funkce

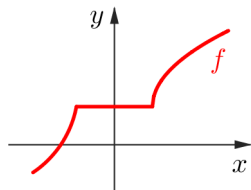
- **ryze monotónní**, je-li rostoucí nebo klesající

- **prostá** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
 - Každá rovnoběžka s osou x protne graf prosté funkce nejvýše v jednom bodě.
 - f je ryze monotónní $\Rightarrow f$ je prostá.
 - Opak (f je prostá $\Rightarrow f$ je ryze monotónní) **neplatí**.

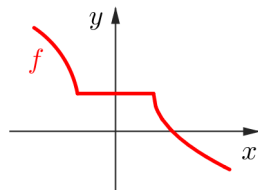


f je na $\langle -3, 2 \rangle$ prostá, ale není na $\langle -3, 2 \rangle$ ryze monotónní.

- **neklesající** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **nerostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



Neklesající funkce

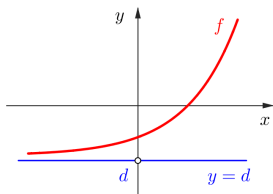


Nerostoucí funkce

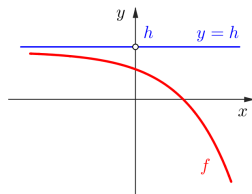
- **monotónní**, je-li neklesající nebo nerostoucí

1.2 Základní vlastnosti funkcí

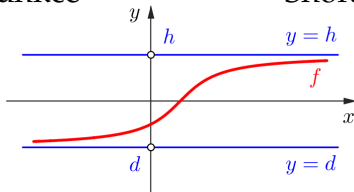
- **zdola ohraničená** – $\exists d \in \mathbb{R}; f(x) \geq d \quad \forall x \in M$
- **shora ohraničená** – $\exists h \in \mathbb{R}; f(x) \leq h \quad \forall x \in M$
- **ohraničená** – $\exists d, h \in \mathbb{R}; d \leq f(x) \leq h \quad \forall x \in M$



Zdola ohraničená funkce



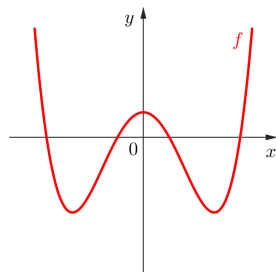
Shora ohraničená funkce



Ohraničená funkce

■ Sudá

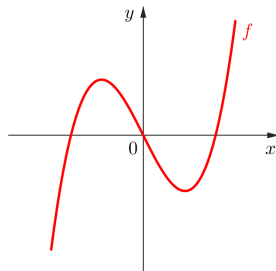
1. $x \in M \Rightarrow -x \in M$
 2. $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in M$
- graf je symetrický vzhledem k ose y



Sudá
funkce

■ Lichá

1. $x \in M \Rightarrow -x \in M$
 2. $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in M$
- graf je symetrický vzhledem k počátku

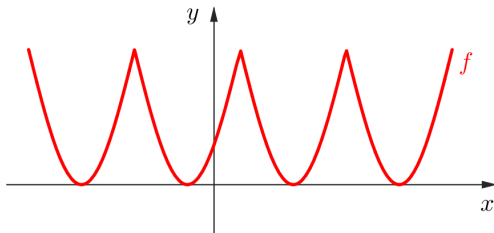


Lichá
funkce

■ Periodická

$\exists p \in \mathbb{R}^+$:

1. $x \in M \Rightarrow x + p \in M$
 2. $f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in M$
- $p \dots$ **perioda**



Periodická funkce

Příklad

Určete, zda je funkce lichá nebo sudá.

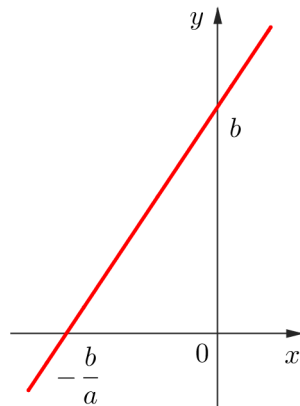
a) $f(x) = x + \frac{1}{x^3}$

b) $f(x) = \frac{1 + x^4}{1 - x^2}$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

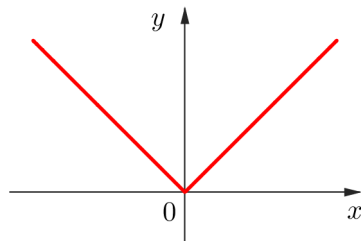
Lineární funkce $y = ax + b$

- $a, b \in \mathbb{R}$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: přímka
- $a = 0$: **Konstantní funkce** $y = b$
- $b = 0$: **Přímá úměrnost** $y = ax$



Absolutní hodnota $y = |x|$

- $D(f) = \mathbb{R}$

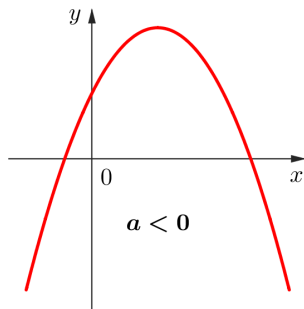
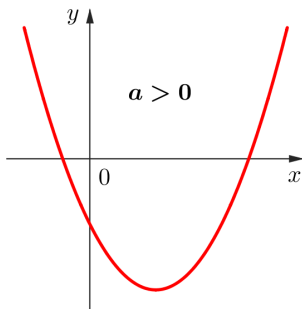


Poznámka:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$

- $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola



Lineární lomená funkce $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

▪ $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0, ad - bc \neq 0$

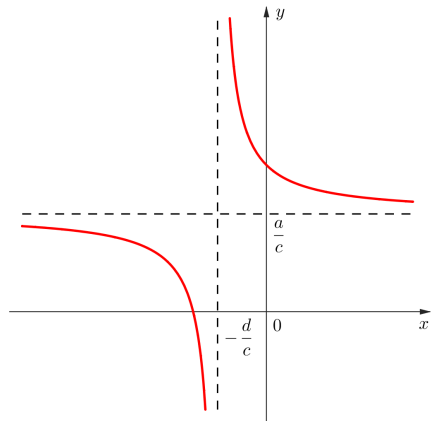
▪ $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

▪ graf: rovnoosá hyperbola

▪ zvláštní případ:

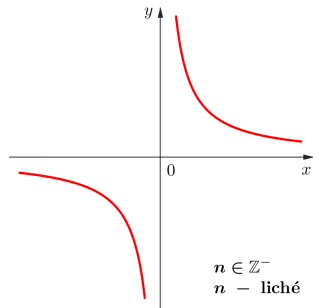
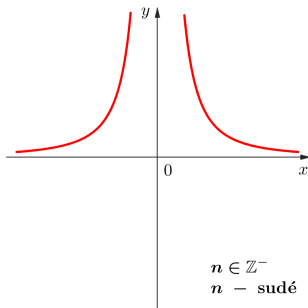
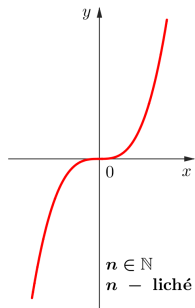
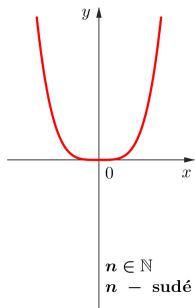
Nepřímá úměrnost $y = \frac{k}{x}$

$k \in \mathbb{R} - \{0\}$



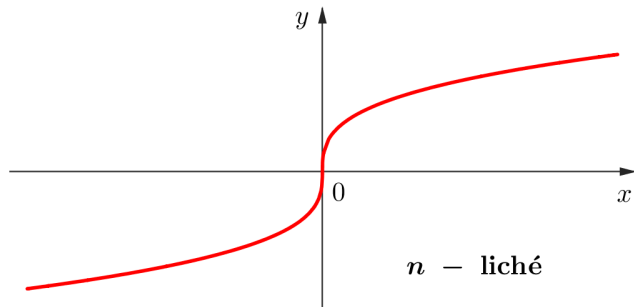
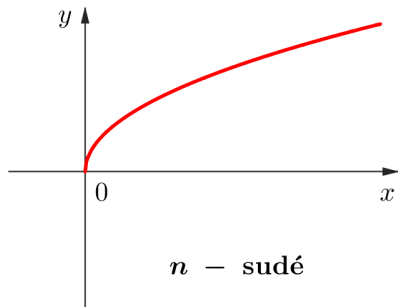
Mocninná funkce $y = x^n$

- $n \in \mathbb{N}$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola n -tého stupně
- $n \in \mathbb{Z}^-$
- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- graf: hyperbola n -tého stupně



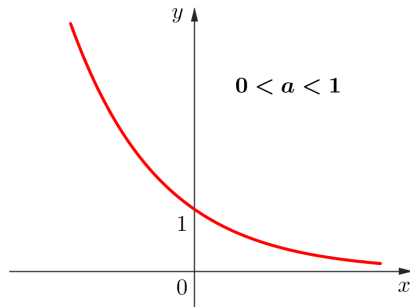
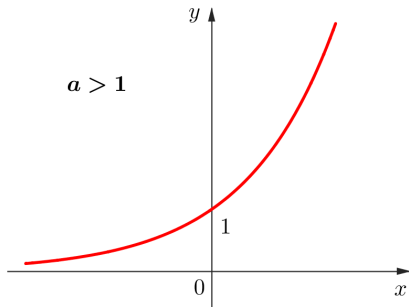
n -tá odmocnina $y = \sqrt[n]{x}$

- $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
- graf: parabola n -tého stupně
- n sudé ... $D(f) = \mathbb{R}_0^+$
- n liché ... $D(f) = \mathbb{R}$



Exponenciální funkce $y = a^x$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}^+$



$\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R} :$

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

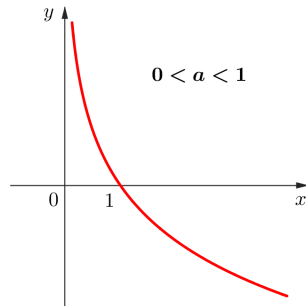
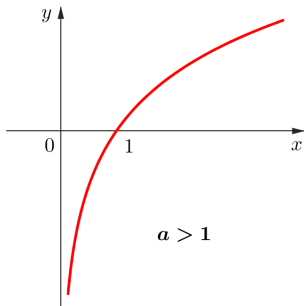
$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

Logaritmická funkce $y = \log_a x \quad \dots \quad a^y = x$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $D(f) = \mathbb{R}^+, \quad H(f) = \mathbb{R}$
- **Přirozený logaritmus:** $y = \ln x = \log_e x, \quad e \doteq 2,71$
- **Dekadický logaritmus:** $y = \log x = \log_{10} x$



$\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R} :$

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

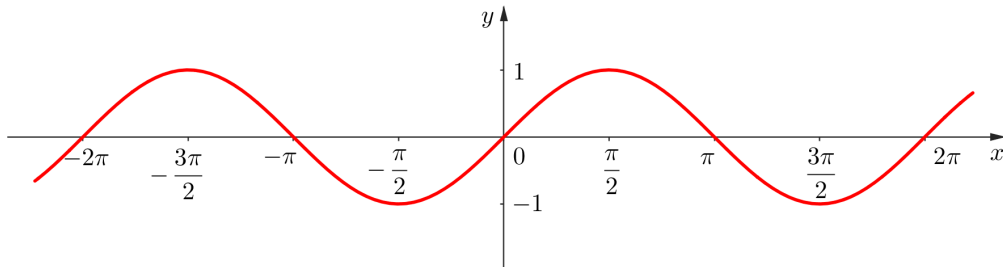
$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

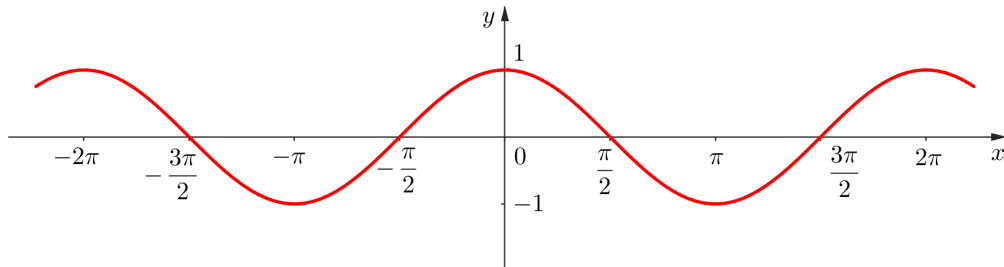
Sinus $y = \sin x$

- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- lichá
- periodická na \mathbb{R} s periodou 2π



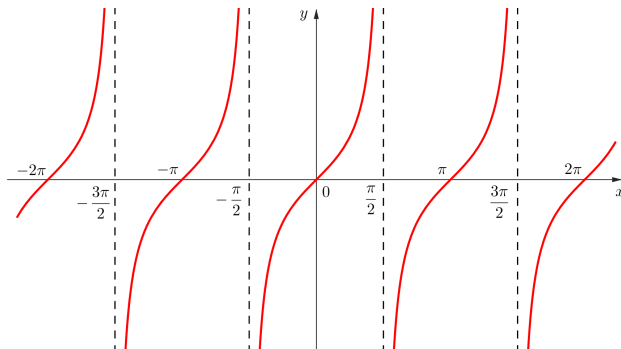
Kosinus $y = \cos x$

- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- sudá
- periodická na \mathbb{R} s periodou 2π



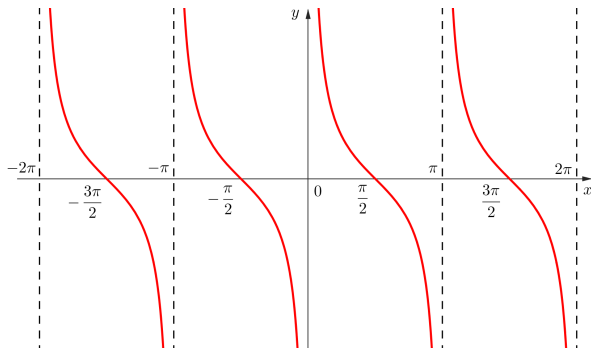
Tangens $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ (2k + 1) \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}, H(f) = \mathbb{R}$
- lichá
- periodická na \mathbb{R} s periodou π



Kotangens $y = \cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$
- lichá
- periodická na \mathbb{R} s periodou π



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/
$\operatorname{cotg} x$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Proměnné x a y vyjádříme pomocí nové proměnné t :

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

Přirozená parametrizace:

$$y = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle$$

↓

$$x = t$$

$$y = f(t), \quad t \in \langle a, b \rangle$$

**DĚKUJI
ZA
POZORNOST!**