

1. REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

- 1.1 Funkce a její graf
- 1.2 Základní vlastnosti funkcí
- 1.3 Elementární funkce
- 1.4 Parametrické zadání funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018. ISBN: 978-80-7204-982-0

1.1 Funkce a její graf

Definice

Řekneme, že **funkčním předpisem** $y = f(x)$ je určena **reálná funkce f jedné reálné proměnné x** , jestliže

- a) je dán obor $A \subseteq \mathbb{R}$ „přípustných“ reálných hodnot nezávisle proměnné x ;
- b) každému $x \in A$ je přiřazena **právě jedna** reálná hodnota závisle proměnné y podle funkčního předpisu $y = f(x)$.

$y = f(x)$... **explicitní zadání**

$A = D(f)$... **definiční obor**

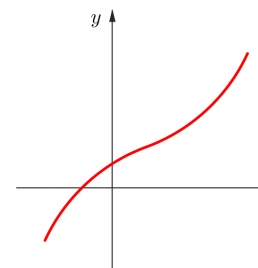
Pokud není definiční obor zadán, bereme **přirozený definiční obor** = množina všech reálných čísel, pro které má funkční předpis $y = f(x)$ smysl.

$f(A) = H(f)$... **obor funkčních hodnot**

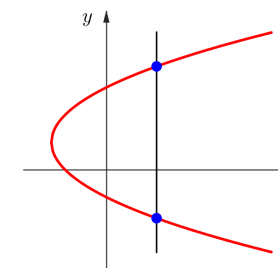
1.1 Funkce a její graf

Graf funkce

- Znázornění funkce
- $\text{Gr } f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \in D(f), y = f(x)\}$
- Každá rovnoběžka s osou y protne graf funkce nejvýše v jednom bodě.



je graf funkce

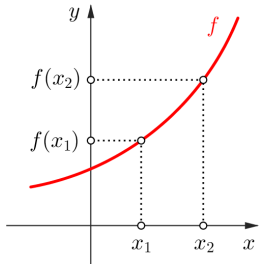


není graf funkce

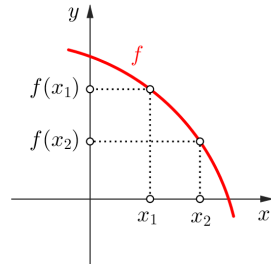
1.2 Základní vlastnosti funkcí

Funkce f je na množině $M \subseteq D(f)$

- **rostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **klesající** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Rostoucí funkce

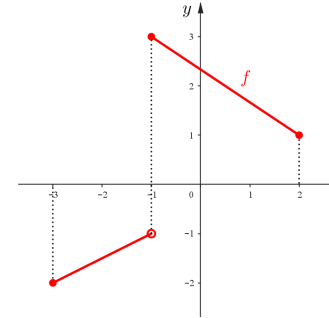


Klesající funkce

- **ryze monotónní**, je-li rostoucí nebo klesající

1.2 Základní vlastnosti funkcí

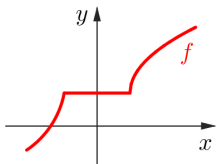
- **prostá** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
 - Každá rovnoběžka s osou x protne graf prosté funkce nejvýše v jednom bodě.
 - f je ryze monotónní $\Rightarrow f$ je prostá.
 - Opak (f je prostá $\Rightarrow f$ je ryze monotónní) **neplatí**.



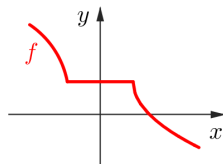
f je na $\langle -3, 2 \rangle$ prostá, ale není na $\langle -3, 2 \rangle$ ryze monotónní.

1.2 Základní vlastnosti funkcí

- **neklesající** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **nerostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



Neklesající funkce

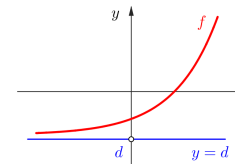


Nerostoucí funkce

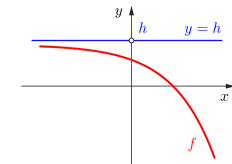
- **monotónní**, je-li neklesající nebo nerostoucí

1.2 Základní vlastnosti funkcí

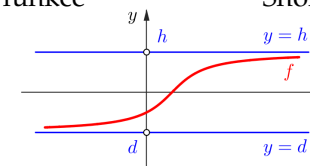
- **zdola ohraničená** – $\exists d \in \mathbb{R}; f(x) \geq d \quad \forall x \in M$
- **shora ohraničená** – $\exists h \in \mathbb{R}; f(x) \leq h \quad \forall x \in M$
- **ohraničená** – $\exists d, h \in \mathbb{R}; d \leq f(x) \leq h \quad \forall x \in M$



Zdola ohraničená funkce



Shora ohraničená funkce

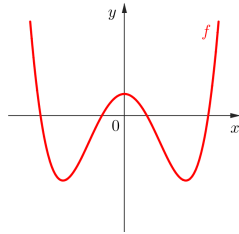


Ohraničená funkce

Funkce je na $D(f)$

■ **Sudá**

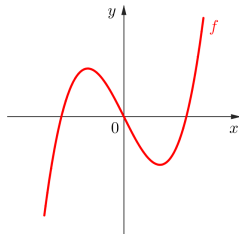
1. $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$
 2. $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D(f)$
- graf je symetrický vzhledem k ose y



Sudá
funkce

■ **Lichá**

1. $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$
 2. $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D(f)$
- graf je symetrický vzhledem k počátku

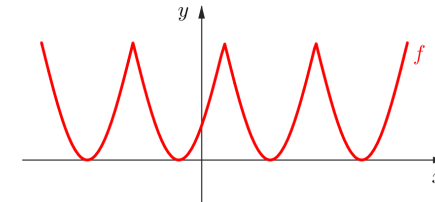


Lichá
funkce

■ **Periodická**

$\exists p \in \mathbb{R}^+$:

1. $x \in D(f) \Rightarrow x \pm p \in D(f)$
 2. $f(x \pm p) = f(x) \quad \forall x \in D(f)$
- $p \dots$ **perioda**



Periodická funkce

Příklad 1.1

Určete, zda je funkce lichá nebo sudá.

a) $f(x) = x + \frac{1}{x^3}$

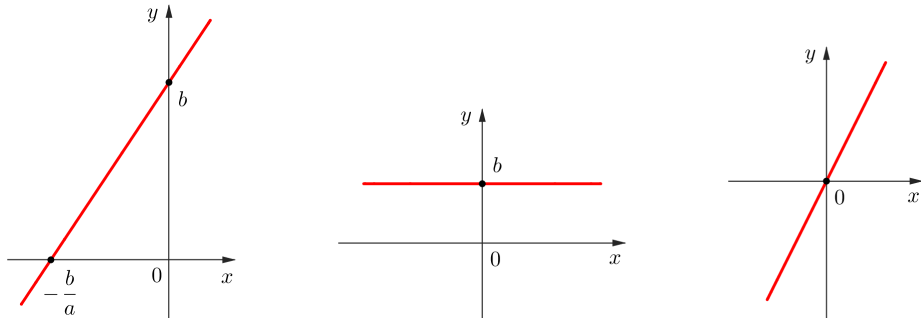
b) $f(x) = \frac{1 + x^4}{1 - x^2}$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

1.3 Elementární funkce

Lineární funkce $y = ax + b$

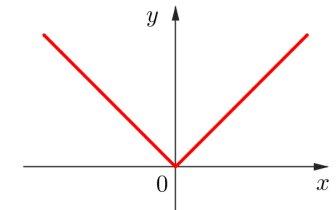
- $a, b \in \mathbb{R}$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: přímka
- $a = 0$: **Konstantní funkce** $y = b$
- $b = 0$: **Přímá úměrnost** $y = ax$



1.3 Elementární funkce

Absolutní hodnota $y = |x|$

- $D(f) = \mathbb{R}$



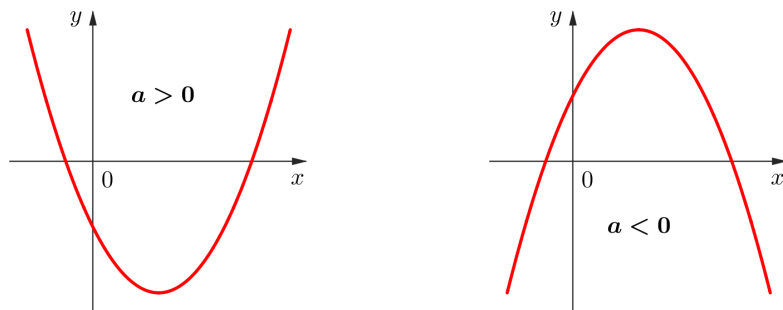
Poznámka:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

1.3 Elementární funkce

Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$

- $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola



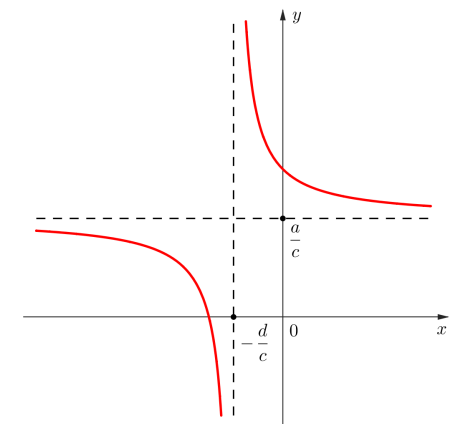
1.3 Elementární funkce

Lineární lomená funkce $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

- $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0, ad - bc \neq 0$
- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$
- graf: rovnoosá hyperbola

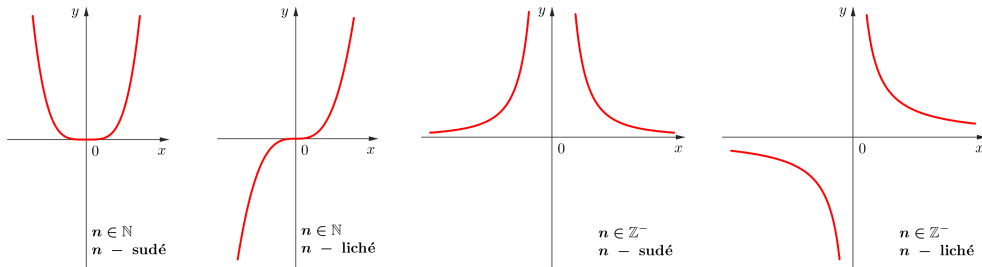
- zvláštní případ:

Nepřímá úměrnost $y = \frac{k}{x}$
 $k \in \mathbb{R} - \{0\}$



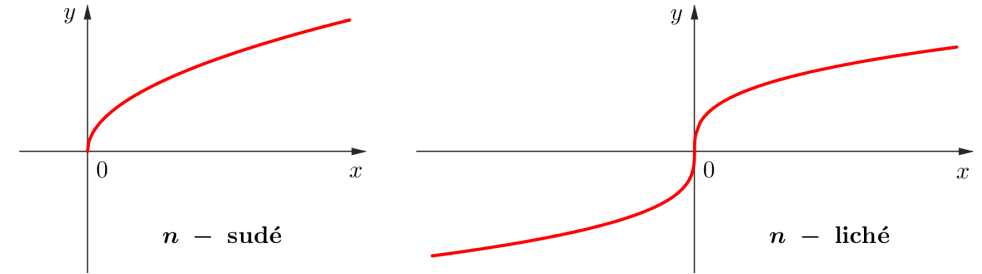
Mocninná funkce $y = x^n$

- $n \in \mathbb{N}$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola n -tého stupně
- $n \in \mathbb{Z}^-$
- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- graf: hyperbola n -tého stupně



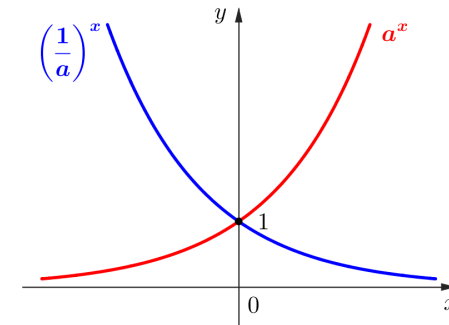
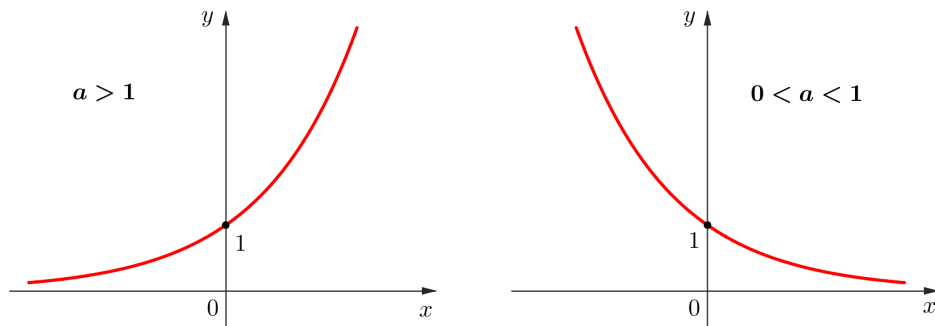
n -tá odmocnina $y = \sqrt[n]{x}$

- $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
- graf: parabola n -tého stupně
- n sudé ... $D(f) = \mathbb{R}_0^+$
- n liché ... $D(f) = \mathbb{R}$



Exponenciální funkce $y = a^x$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}^+$



Grafy funkcí a^x a $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ jsou symetrické podle osy y .

$\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R} :$

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

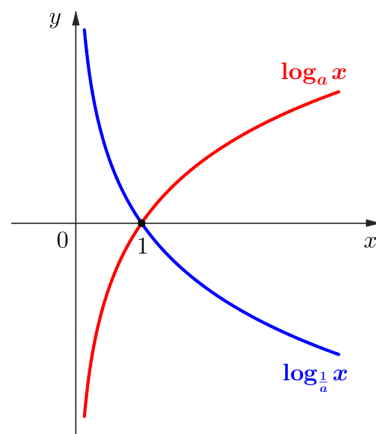
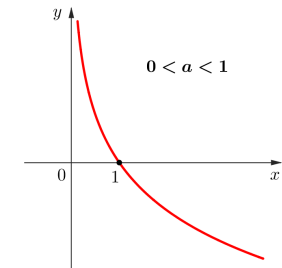
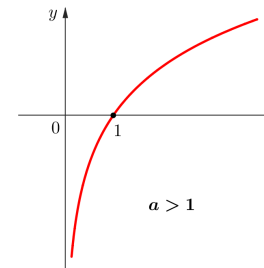
$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

Logaritmická funkce $y = \log_a x \quad \dots \quad a^y = x$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $D(f) = \mathbb{R}^+, H(f) = \mathbb{R}$
- **Přirozený logaritmus:** $y = \ln x = \log_e x$, $e \doteq 2,71$
- **Dekadický logaritmus:** $y = \log x = \log_{10} x$



Grafy funkcí $\log_a x$ a $\log_{\frac{1}{a}} x$ jsou symetrické podle osy x .

$\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R} :$

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

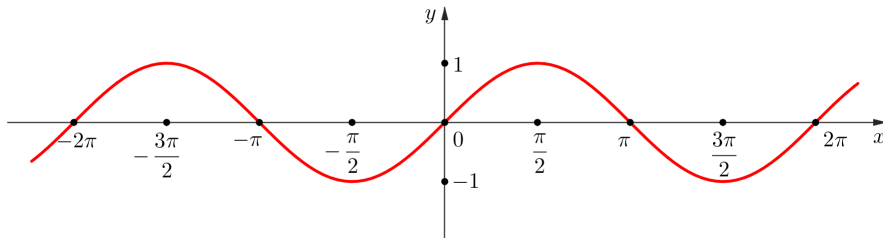
$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

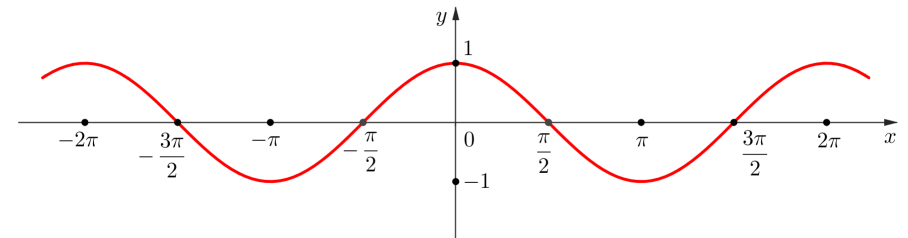
$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Sinus $y = \sin x$

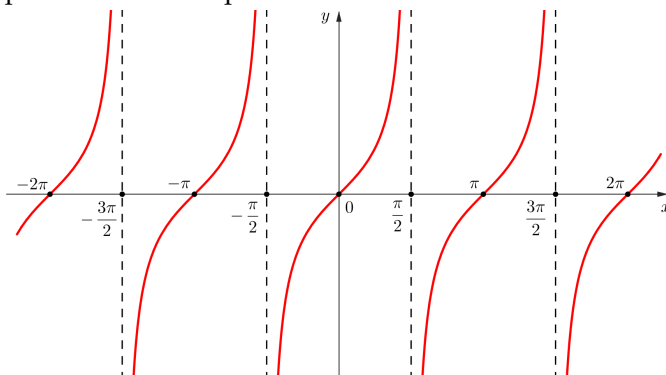
- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- lichá, periodická na \mathbb{R} s periodou 2π

**Kosinus** $y = \cos x$

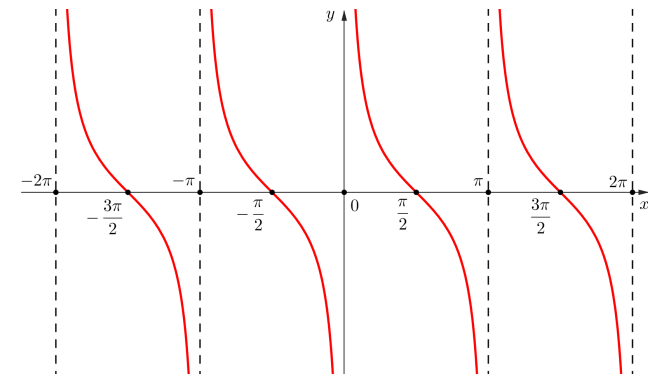
- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- sudá, periodická na \mathbb{R} s periodou 2π

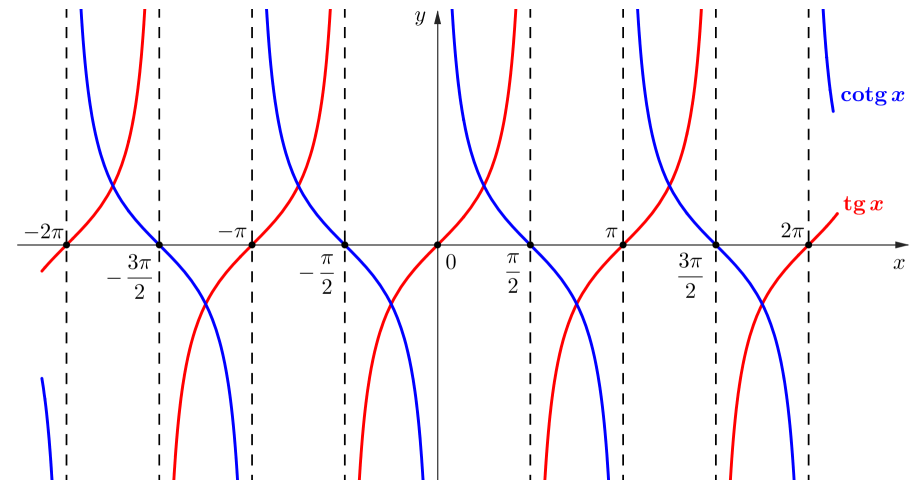
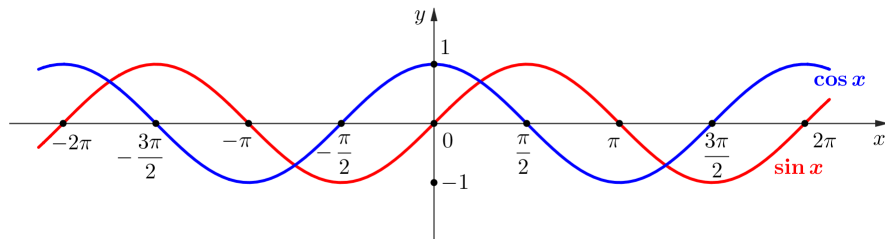
**Tangens** $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$, $H(f) = \mathbb{R}$
- lichá, periodická na \mathbb{R} s periodou π

**Kotangens** $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$
- lichá, periodická na \mathbb{R} s periodou π





x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/
$\operatorname{cotg} x$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

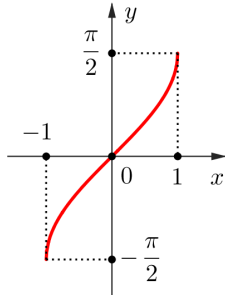
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

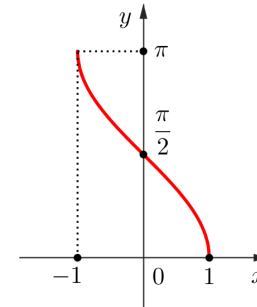
Arkussinus $y = \arcsin x$

- $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
- lichá, rostoucí



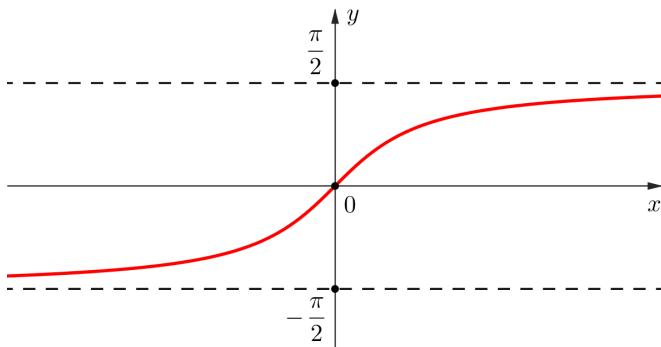
Arkuskosinus $y = \arccos x$

- $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(f) = \langle 0, \pi \rangle$
- klesající



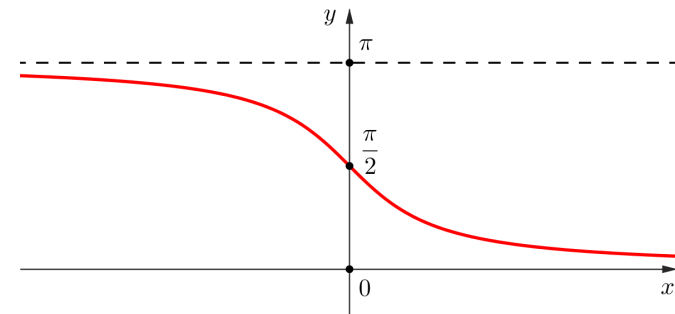
Arkustangens $y = \arctg x$

- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$
- lichá, rostoucí



Arkuskotangens $y = \operatorname{arccotg} x$

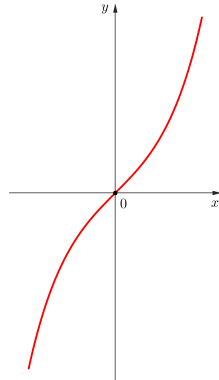
- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \pi)$
- klesající



1.3 Elementární funkce → Hyperbolické funkce

Hyperbolický sinus $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

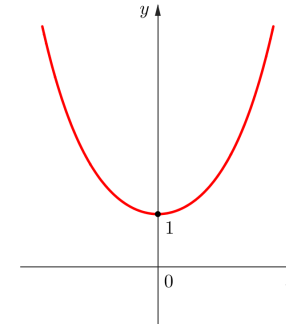
- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$
- lichá, rostoucí



1.3 Elementární funkce → Hyperbolické funkce

Hyperbolický kosinus $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

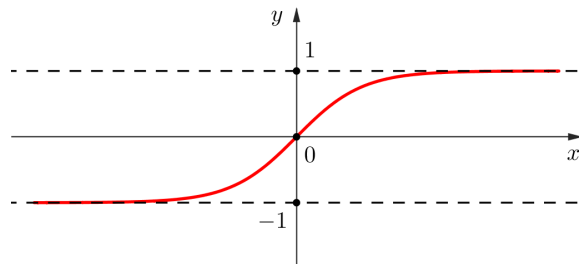
- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (1, \infty)$
- sudá
- graf: řetězovka



1.3 Elementární funkce → Hyperbolické funkce

Hyperbolický tangens $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

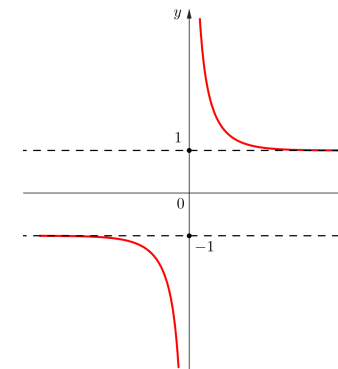
- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (-1, 1)$
- lichá, rostoucí



1.3 Elementární funkce → Hyperbolické funkce

Hyperbolický kotangens $y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $H(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- lichá, klesající



Proměnné x a y vyjádříme pomocí nové proměnné t :

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

■ **Přirozená parametrizace:**

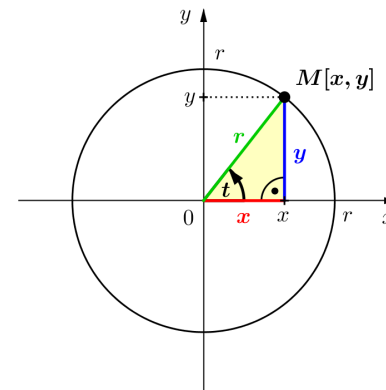
$$y = f(x), \quad x \in D(f)$$

↓

$$x = t$$

$$y = f(t), \quad t \in D(f)$$

■ **Kružnice:** $x^2 + y^2 = r^2$



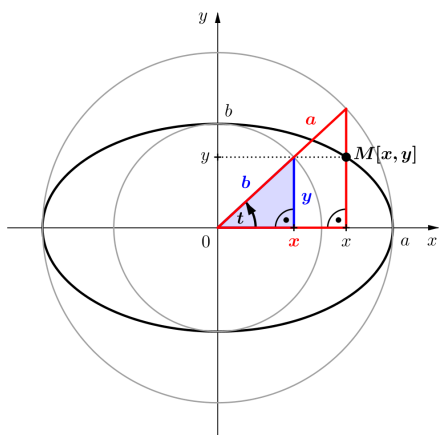
parametrické vyjádření:

$$\cos t = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos t$$

$$\sin t = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin t$$

- 1/4 kružnice (I. kvadrant): $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
- 1/2 kružnice (I. a II. kvadrant): $t \in \langle 0, \pi \rangle$
- celá kružnice: $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$... není funkce!

■ **Elipsa:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



parametrické vyjádření:

$$\bullet \cos t = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cos t$$

$$\bullet \sin t = \frac{y}{b} \Rightarrow y = b \sin t$$

- 1/4 elipsa (I. kvadrant): $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
- 1/2 elipsa (I. a II. kvadrant): $t \in \langle 0, \pi \rangle$
- celá elipsa: $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$... není funkce!

■ **Přímka procházející body A a B:**

$$X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

- $t \in \mathbb{R}$... celá přímka
- $t \in \langle 0, 1 \rangle$... úsečka AB

Např. parametrické vyjádření úsečky AB; $A[1, 5]$, $B[3, 2]$:

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 5 - 3t$$

$$t \in \langle 0, 1 \rangle$$