FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika 1

1. REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

FAST

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018. ISBN: 978-80-7204-982-0

Definice

Řekneme, že **funkčním předpisem $y = f(x)$** je určena **reálná funkce f jedné reálné proměnné x**, jestliže

a) je dán obor $A \subseteq \mathbb{R}$ „přípustných“ reálných hodnot nezávisle proměnné x;

b) každému $x \in A$ je přiřazena **právě jedna** reálná hodnota závisle proměnné y podle funkčního předpisu $y = f(x)$.

$y = f(x)$ … **explicitní zadání**

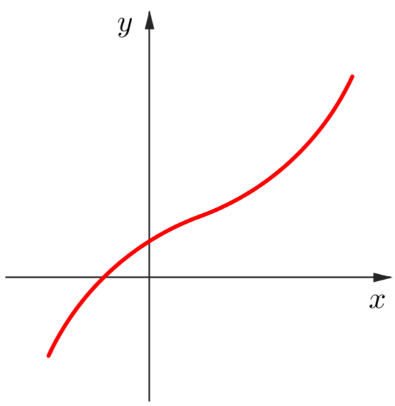
$A = \boldsymbol{D(f)}$ … **definiční obor**

Pokud není definiční obor zadán, bereme **přirozený definiční obor** = množina všech reálných čísel, pro které má funkční předpis $y = f(x)$ smysl.

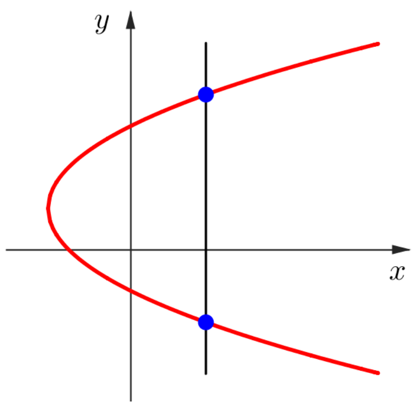
$f(A) = \boldsymbol{H(f)}$ … **obor funkčních hodnot**

Graf funkce

- Znázornění funkce
- $\mathrm{Gr}\, f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x \in D(f),\ y = f(x)\}$
- Každá rovnoběžka s osou y protne graf funkce nejvýše v jednom bodě.



je graf funkce

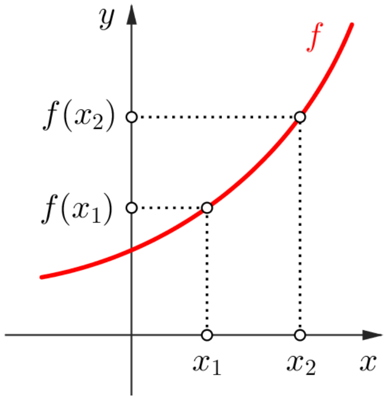


není graf funkce

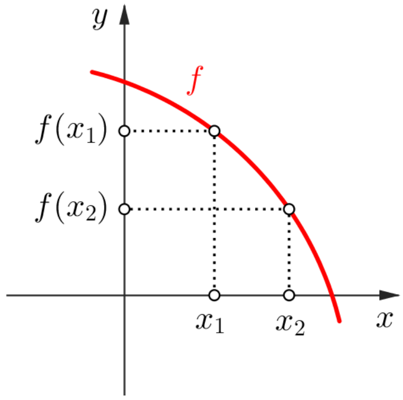
1.2 Základní vlastnosti funkcí

Funkce f je na množině $M \subseteq D(f)$

- **rostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M : \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$
- **klesající** – $\forall x_1, x_2 \in M : \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$



Rostoucí funkce

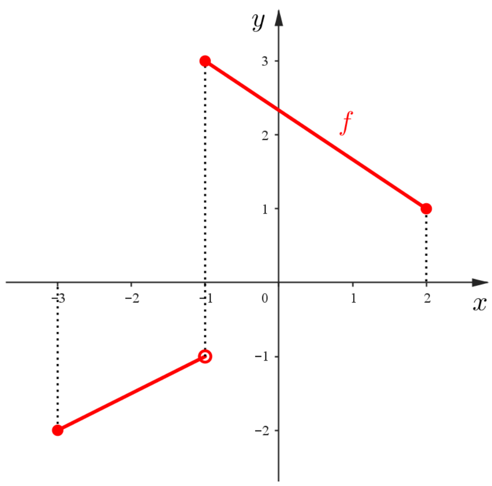


Klesající funkce

- **ryze monotónní**, je-li rostoucí nebo klesající

1.2 Základní vlastnosti funkcí

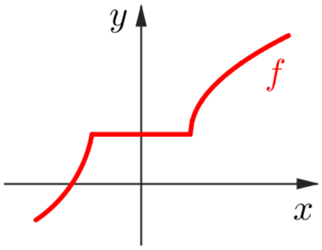
- **prostá** – $\forall x_1, x_2 \in M : \boldsymbol{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$
  - Kažká rovnoběžka s osou x protne graf prosté funkce nejvýše v jednom bodě.
  - f je ryze monotónní $\Rightarrow$ f je prostá.
  - Opak (f je prostá $\Rightarrow$ f je ryze monotónní) **neplatí.**



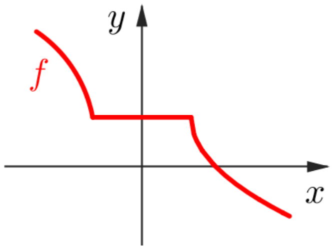
f je na $\langle -3, 2\rangle$ prostá, ale není na $\langle -3, 2\rangle$ ryze monotónní.

1.2 Základní vlastnosti funkcí

- **neklesající** – $\forall x_1, x_2 \in M: \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$
- **nerostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M: \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)}$



Neklesající funkce

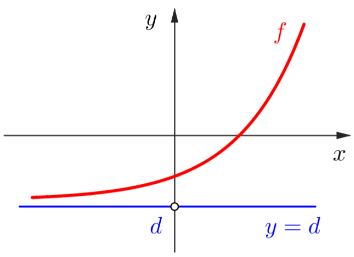


Nerostoucí funkce

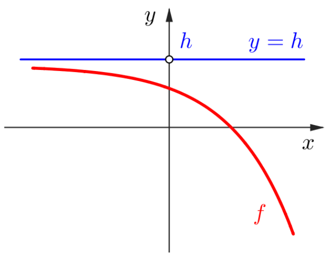
- **monotónní**, je-li neklesající nebo nerostoucí

1.2 Základní vlastnosti funkcí

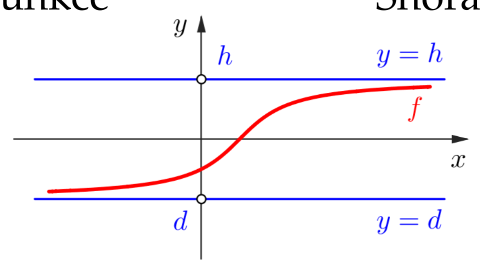
- **zdola ohraničená** – $\exists\, d \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{f(x) \geq d}\ \forall x \in M$
- **shora ohraničená** – $\exists\, h \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{f(x) \leq h}\ \forall x \in M$
- **ohraničená** – $\exists\, d, h \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{d \leq f(x) \leq h}\ \forall x \in M$



Zdola ohraničená funkce



Shora ohraničená funkce

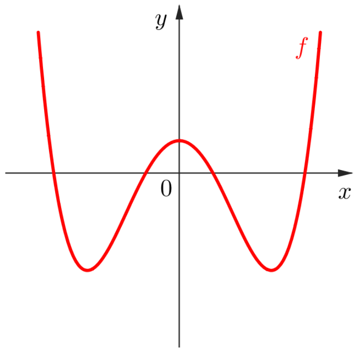


Ohraničená funkce

1.2 Základní vlastnosti funkcí

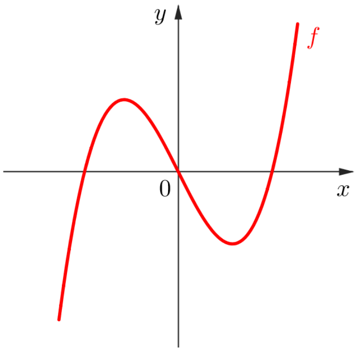
Funkce je na $D(f)$

- **Sudá**
  1. $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$
  2. $\boldsymbol{f(-x) = f(x)} \quad \forall x \in D(f)$
  - graf je symetrický vzhledem k ose y



Sudá funkce

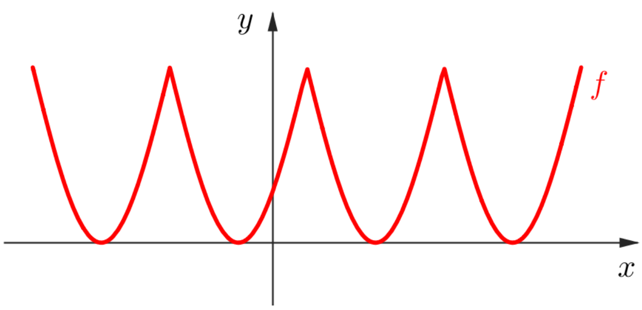
- **Lichá**
  1. $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$
  2. $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)} \quad \forall x \in D(f)$
  - graf je symetrický vzhledem k počátku



Lichá funkce

1.2 Základní vlastnosti funkcí

- **Periodická**
  $\exists\, p \in \mathbb{R}^+ :$
  1. $x \in D(f) \Rightarrow x \pm p \in D(f)$
  2. $\boldsymbol{f(x \pm p) = f(x)} \quad \forall x \in D(f)$
  - $p \ldots$ **perioda**



Periodická funkce

Příklad 1.1

Určete, zda je funkce lichá nebo sudá.

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^3}$

b) $f(x) = \dfrac{1+x^4}{1-x^2}$

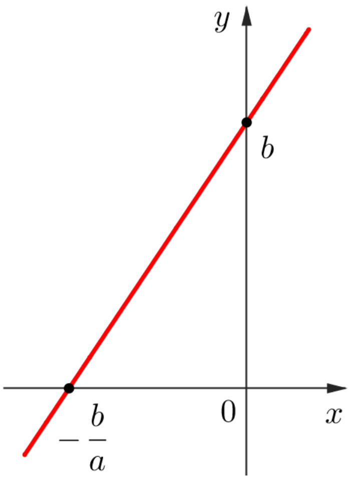
c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

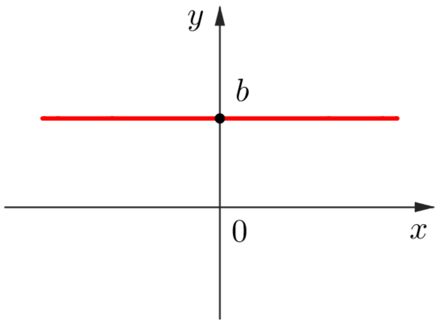
1.3 Elementární funkce

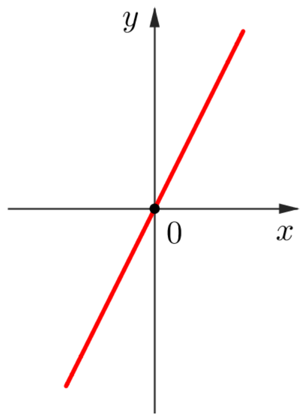
Lineární funkce $y = ax + b$

- $a, b \in \mathbb{R}$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: přímka

- $a = 0$: **Konstantní funkce** $y = b$
- $b = 0$: **Přímá úměrnost** $y = ax$



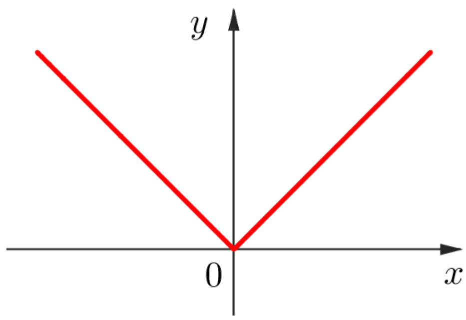




1.3 Elementární funkce

Absolutní hodnota $y = |x|$

- $D(f) = \mathbb{R}$

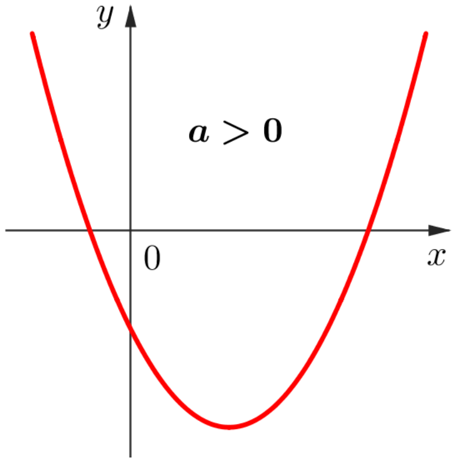


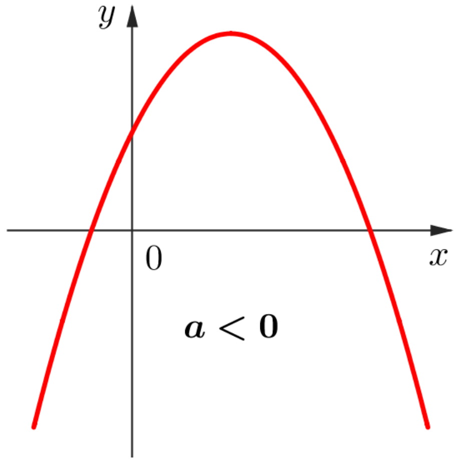
Poznámka:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

Kvadratická funkce $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

- $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola



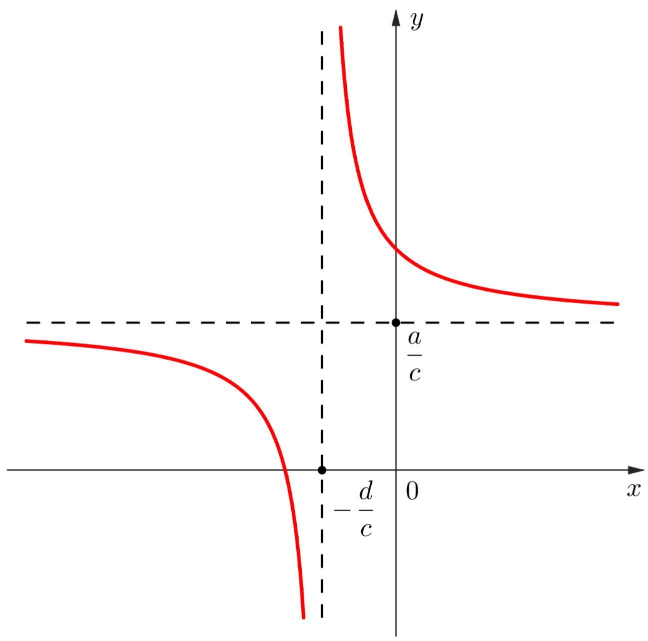


Lineární lomená funkce $\boldsymbol{y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$

- $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ c \neq 0,\ ad - bc \neq 0$
- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$
- graf: rovnoosá hyperbola
- zvláštní případ:

  Nepřímá úměrnost $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x}}$

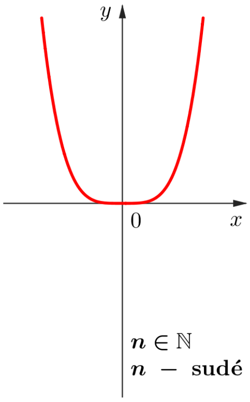
  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

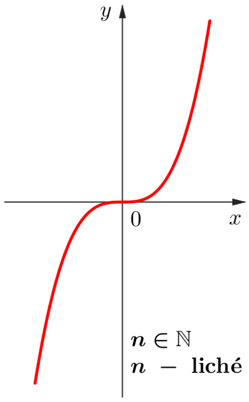


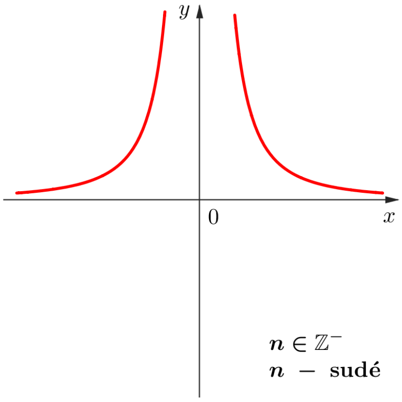
Mocninná funkce $y = x^n$

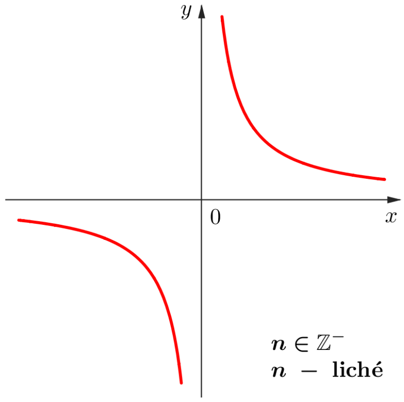
- $n \in \mathbb{N}$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola n-tého stupně

- $n \in \mathbb{Z}^-$
- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- graf: hyperbola n-tého stupně







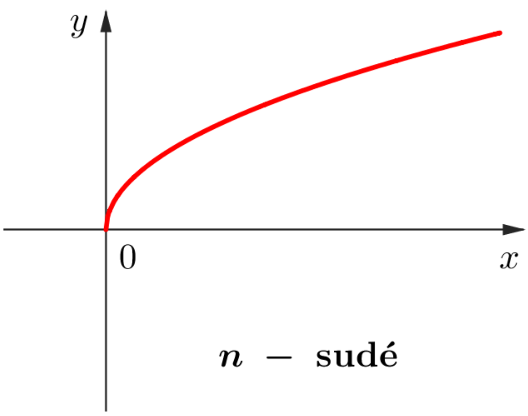


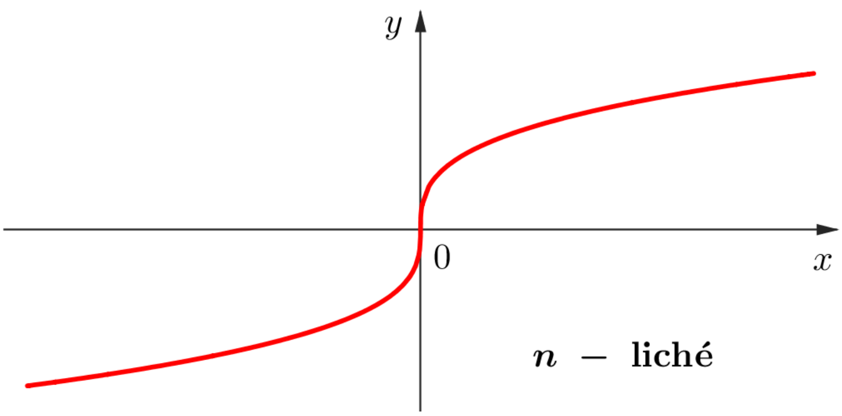
1.3 Elementární funkce

n-tá odmocnina $y = \sqrt[n]{x}$

- $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$
- graf: parabola n-tého stupně

- n sudé … $D(f) = \mathbb{R}_0^+$
- n liché … $D(f) = \mathbb{R}$

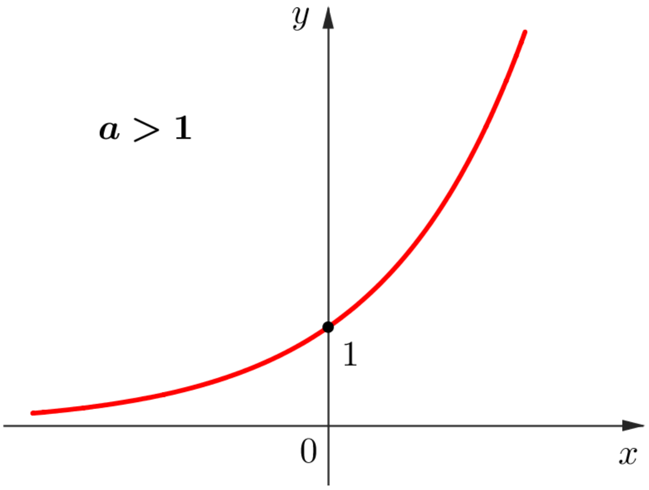


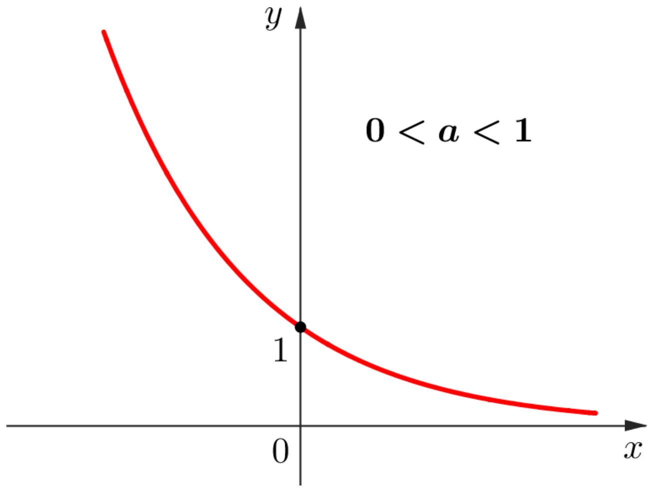


FAST

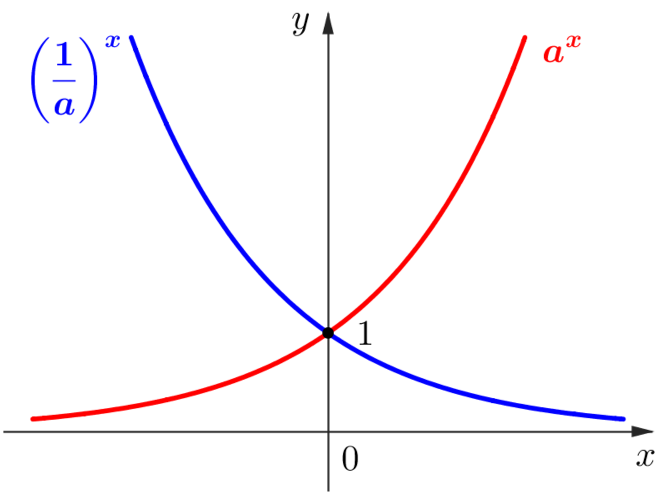
Exponenciální funkce $\boldsymbol{y = a^x}$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \mathbb{R}^+$





FAST



Grafy funkcí a^x a $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ jsou symetrické podle osy y.

$\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}}$$

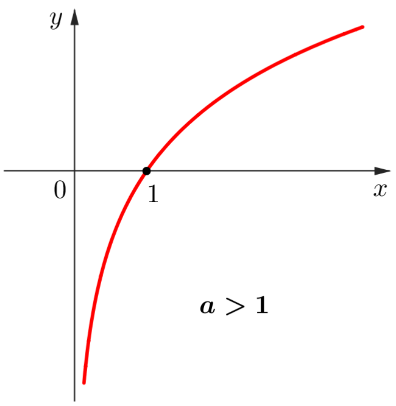
$$\boldsymbol{\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}}$$

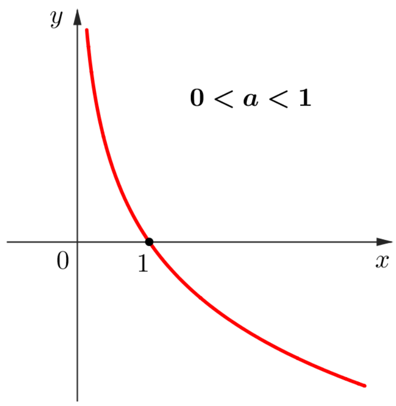
$$\boldsymbol{(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}}$$

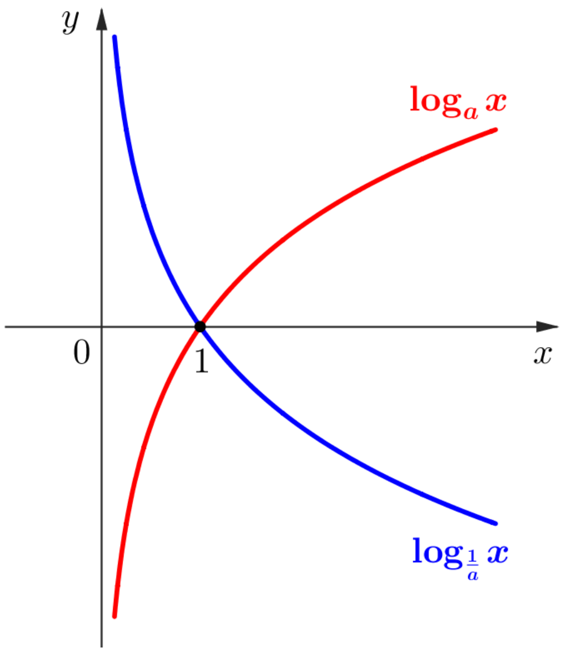
$$\boldsymbol{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x}$$

Logaritmická funkce $\boldsymbol{y = \log_a x}$ $\quad \dots \quad a^y = x$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $D(f) = \mathbb{R}^+, \quad H(f) = \mathbb{R}$
- **Přirozený logaritmus**: $\boldsymbol{y = \ln x} = \log_e x, \quad e \doteq 2,71$
- **Dekadický logaritmus**: $\boldsymbol{y = \log x} = \log_{10} x$







Grafy funkcí $\log_a x$ a $\log_{\frac{1}{a}} x$ jsou symetrické podle osy x.

$\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}:$

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

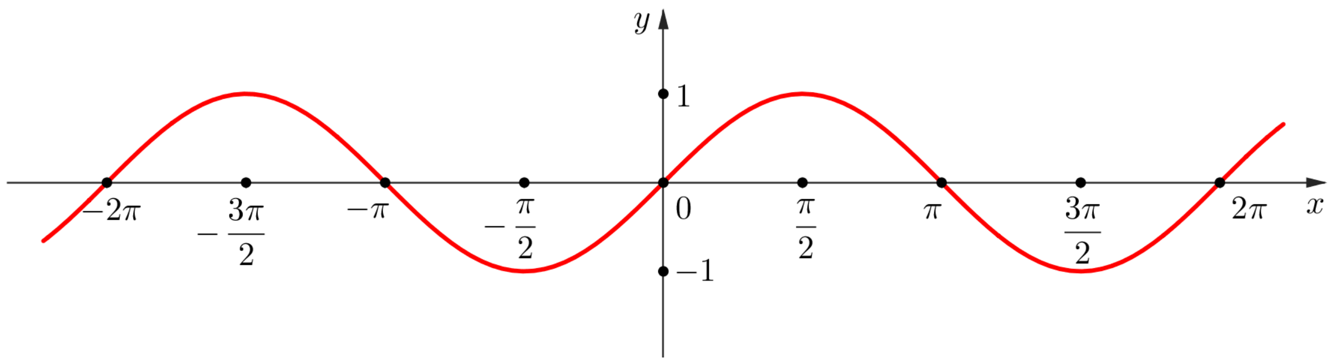
$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

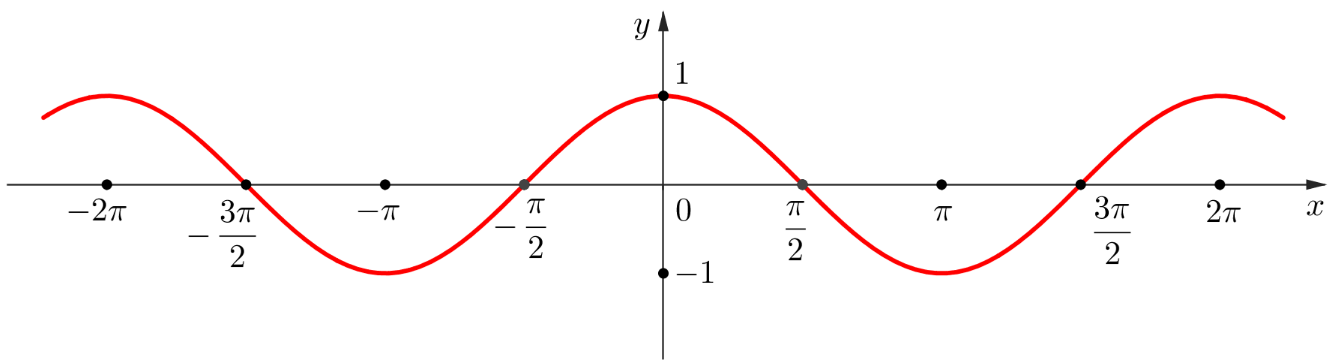
Sinus $y = \sin x$

- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- lichá, periodická na $\mathbb{R}$ s periodou 2π



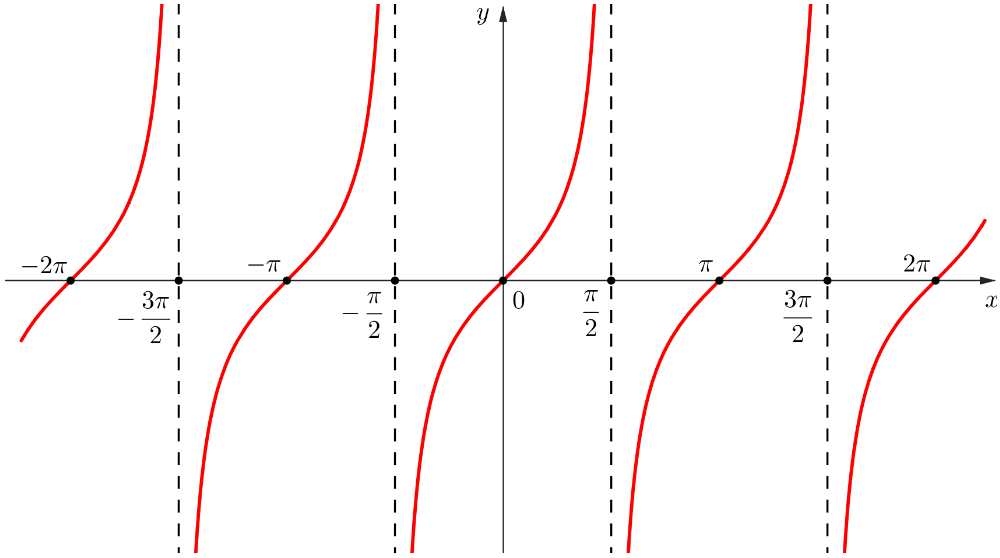
Kosinus $y = \cos x$

- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- sudá, periodická na $\mathbb{R}$ s periodou 2π



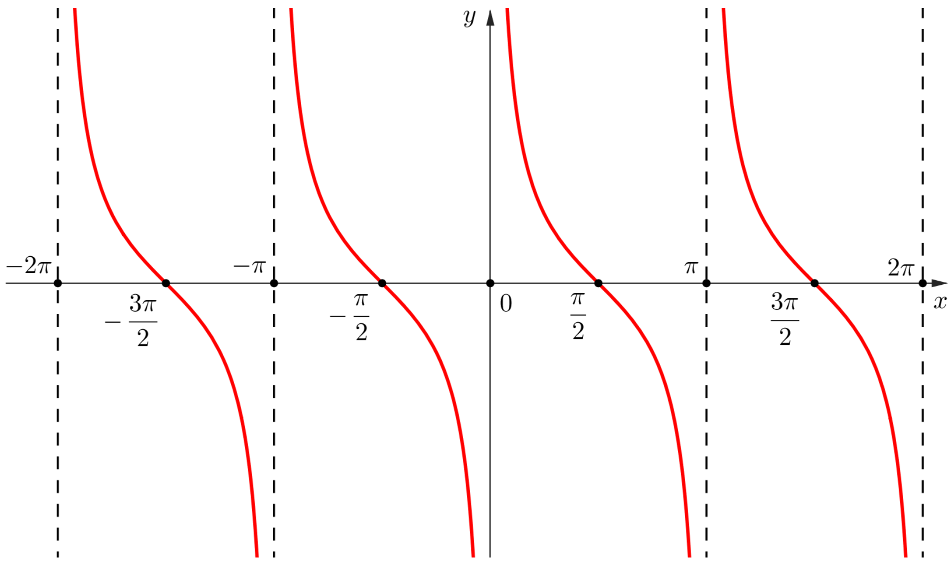
Tangens $\boldsymbol{y = \operatorname{tg} x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

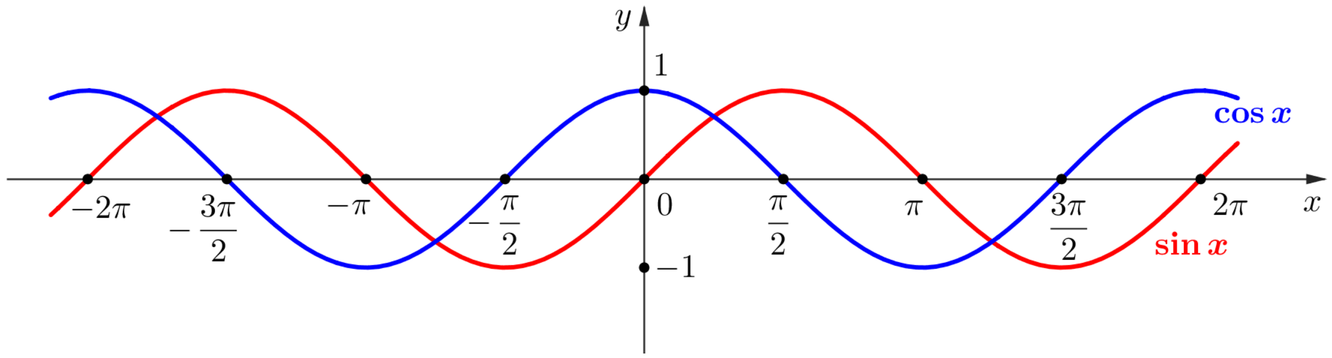
- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad H(f) = \mathbb{R}$
- lichá, periodická na $\mathbb{R}$ s periodou π

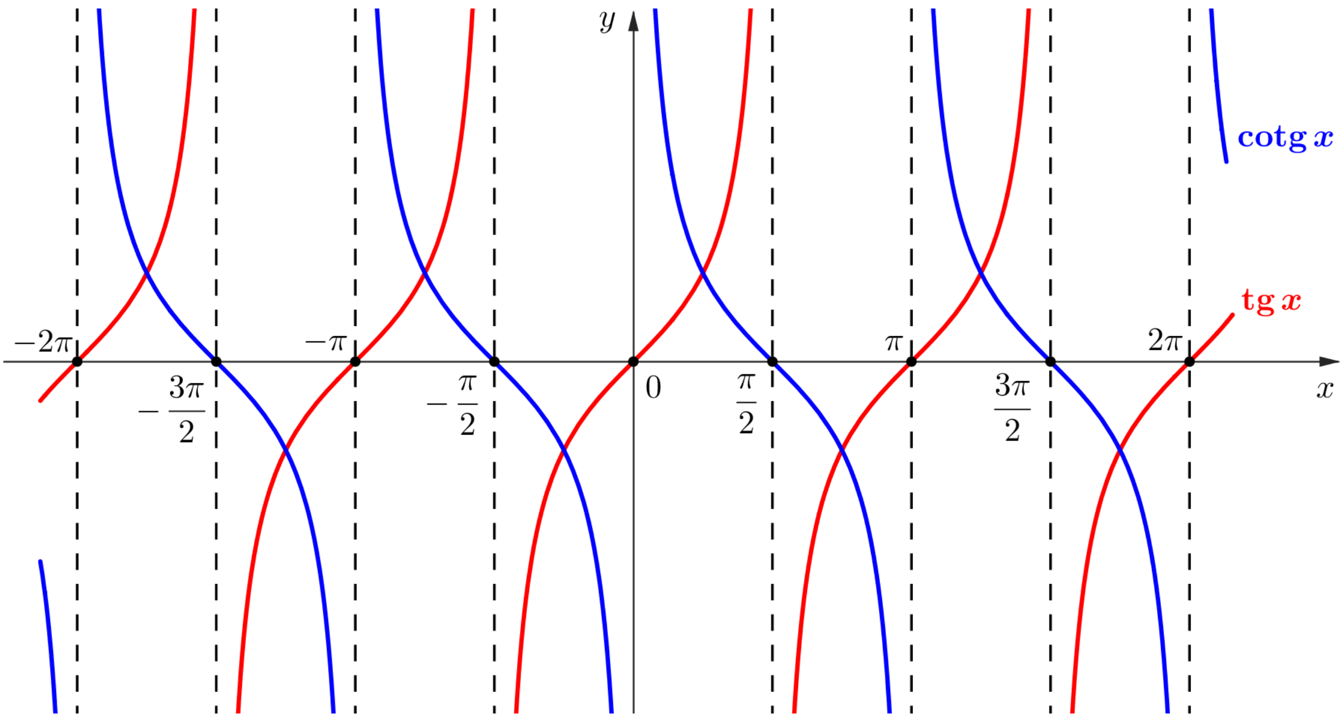


Kotangens $\boldsymbol{y = \operatorname{cotg} x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad H(f) = \mathbb{R}$
- lichá, periodická na $\mathbb{R}$ s periodou π




y
1
cos x
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x
-1
sin x


y
cotg x
tg x
-2π
$-\pi$
π
2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
x

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/
$\operatorname{cotg} x$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

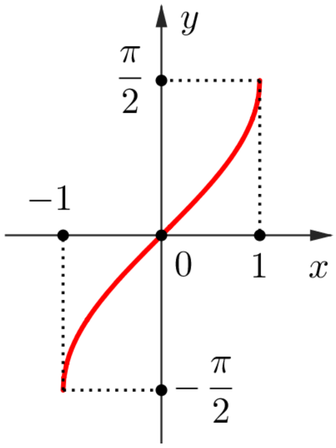
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

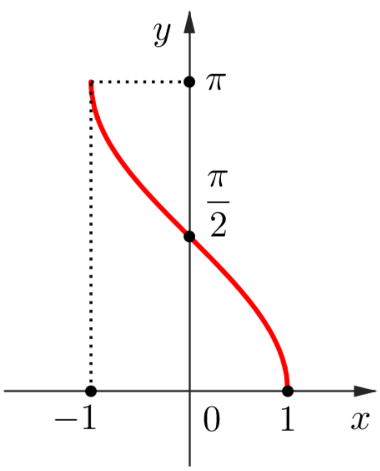
Arkussinus $y = \arcsin x$

- $D(f) = \langle -1, 1 \rangle, \quad H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
- lichá, rostoucí



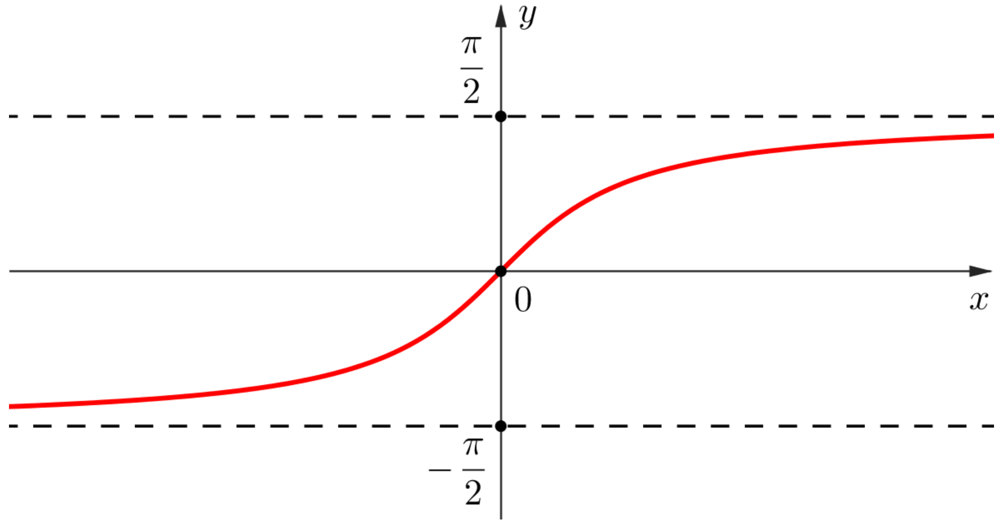
Arkuskosinus $y = \arccos x$

- $D(f) = \langle -1, 1 \rangle, \quad H(f) = \langle 0, \pi \rangle$
- klesající



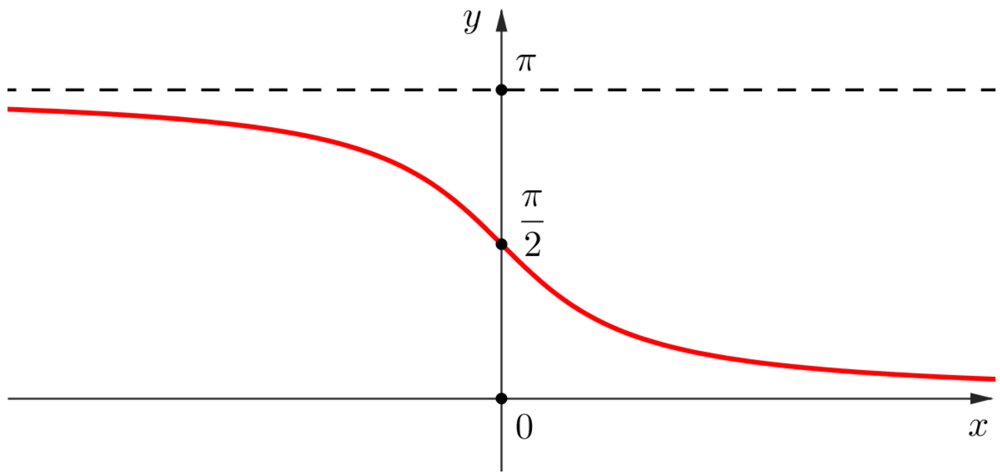
Arkustangens $y = \operatorname{arctg} x$

- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- lichá, rostoucí



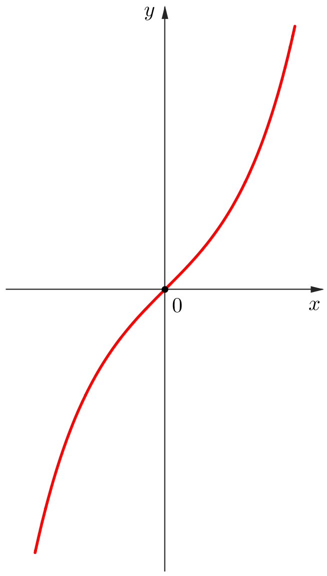
Arkuskotangens $y = \operatorname{arccotg} x$

- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = (0, \pi)$
- klesající



Hyperbolický sinus $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

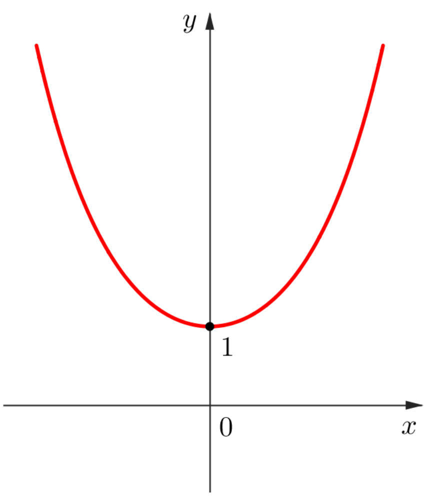
- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \mathbb{R}$
- lichá, rostoucí



1.3 Elementární funkce → Hyperbolické funkce

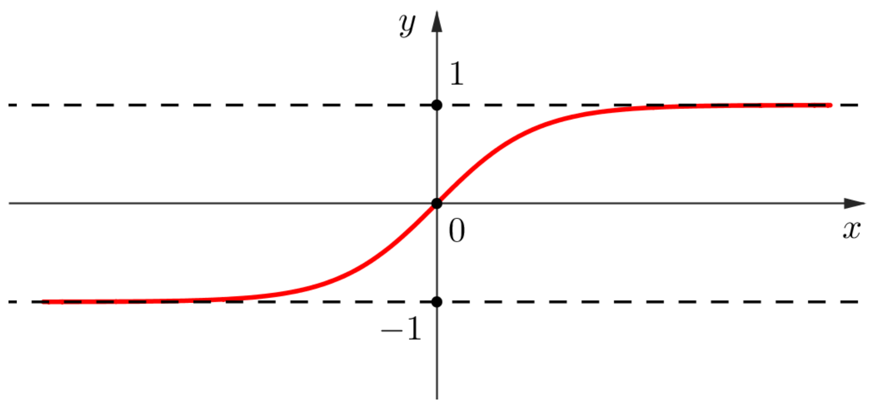
Hyperbolický kosinus $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \langle 1, \infty)$
- sudá
- graf: řetězovka



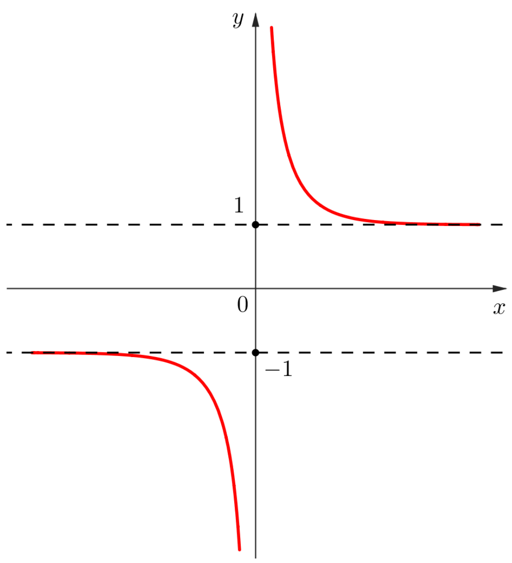
Hyperbolický tangens $\boldsymbol{y = \mathrm{tgh}\, x} = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = (-1, 1)$
- lichá, rostoucí



Hyperbolický kotangens $\boldsymbol{y = \mathrm{cotgh}\, x} = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, \quad H(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- lichá, klesající



1.4 Parametrické zadání funkce

Proměnné x a y vyjádříme pomocí nové proměnné t:

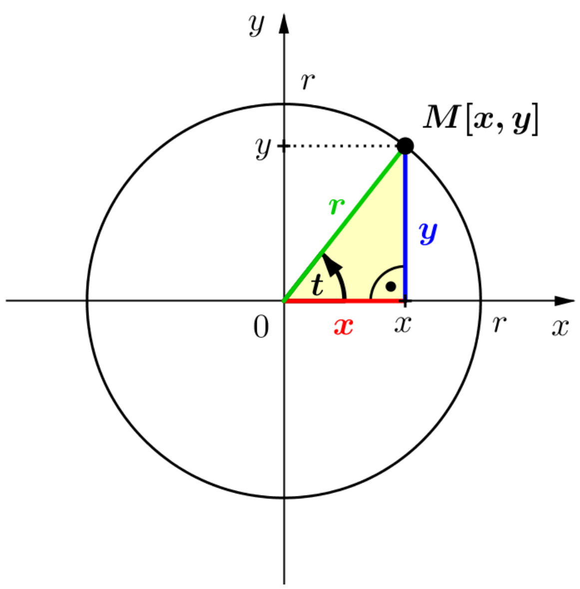
$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$

- **Přirozená parametrizace:**

$$y = f(x), \quad x \in D(f)$$
$$\downarrow$$
$$x = t$$
$$y = f(t), \quad t \in D(f)$$

1.4 Parametrické zadání funkce

- **Kružnice:** $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$



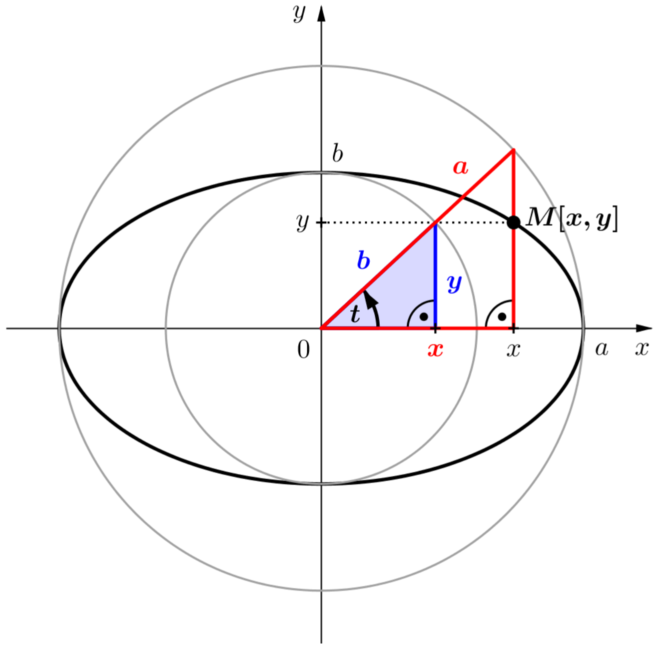
parametrické vyjádření:

$$\cos t = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r\cos t$$
$$\sin t = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = r\sin t$$

- 1/4 kružnice (I. kvardrant): $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
- 1/2 kružnice (I. a II. kvardrant): $t \in \langle 0, \pi \rangle$
- celá kružnice: $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ … není funkce!

1.4 Parametrické zadání funkce

- **Elipsa:** $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$



parametrické vyjádření:

- $\cos t = \dfrac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad x = a\cos t$
- $\sin t = \dfrac{y}{b} \quad \Rightarrow \quad y = b\sin t$

- $1/4$ elipsa (I. kvardrant): $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
- $1/2$ elipsa (I. a II. kvardrant): $t \in \langle 0, \pi \rangle$
- celá elipsa: $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ … není funkce!

1.4 Parametrické zadání funkce

- **Přímka procházející body A a B:**

$$X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

- $t \in \mathbb{R}$ … celá přímka
- $t \in \langle 0, 1 \rangle$ … úsečka AB

Např. parametrické vyjádření úsečky AB; $A[1, 5]$, $B[3, 2]$:

$$x = 1 + 2t$$
$$y = 5 - 3t$$
$$t \in \langle 0, 1 \rangle$$