FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika 1

1. REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

1.1 Funkce a její graf

FAST

Definice

Řekneme, že **funkčním předpisem $\boldsymbol{y = f(x)}$** je určena **reálná funkce $\boldsymbol{f}$ jedné reálné proměnné $\boldsymbol{x}$**, jestliže

a) je dán obor $A \subset \mathbb{E}_1$ „přípustných“ reálných hodnot nezávisle proměnné x;

b) každému $x \in A$ je přiřazena **právě jedna** reálná hodnota závisle proměnné y podle funkčního předpisu $y = f(x)$.

$y = f(x)$ ... **explicitní zadání**

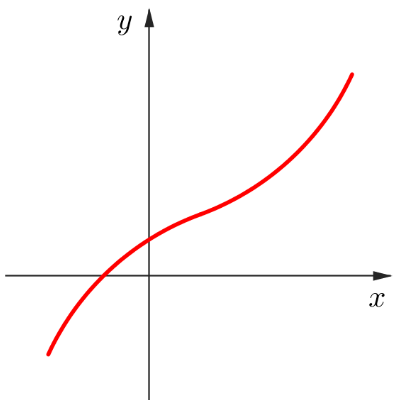
$A = \boldsymbol{D(f)}$ ... **definiční obor**

Pokud není definiční obor zadán, bereme **přirozený definiční obor** = množina všech reálných čísel, pro které má funkční předpis $y = f(x)$ smysl.

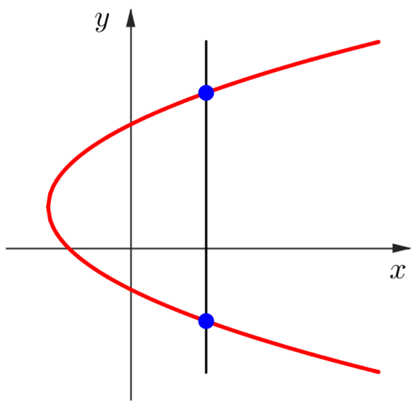
$f(A) = \boldsymbol{H(f)}$ ... **obor funkčních hodnot**

Graf funkce

- Znázornění funkce
- $\mathrm{Gr}\, f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x \in D(f),\ y = f(x)\}$
- Každá rovnoběžka s osou y protne graf funkce nejvýše v jednom bodě.



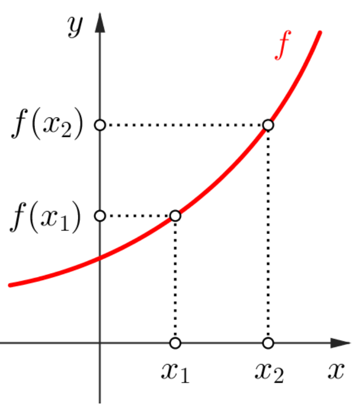
je graf funkce



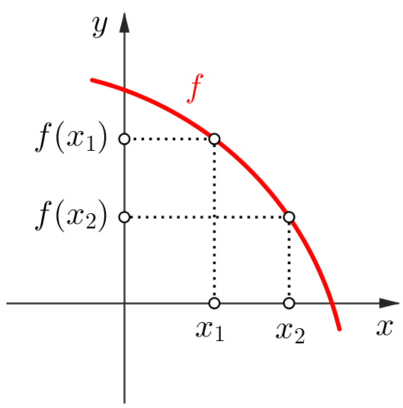
není graf funkce

Funkce f je na množině $M \subseteq D(f)$

- **rostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M: \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$
- **klesající** – $\forall x_1, x_2 \in M: \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$



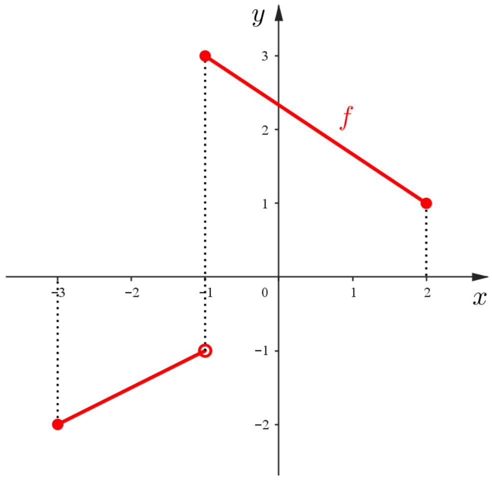
Rostoucí funkce



Klesající funkce

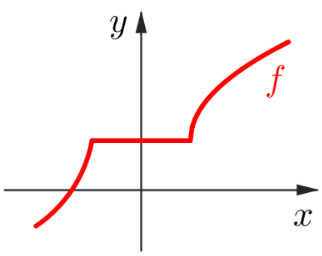
- **ryze monotónní**, je-li rostoucí nebo klesající

- **prostá** – $\forall x_1, x_2 \in M: \boldsymbol{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$
  - Kažká rovnoběžka s osou x protne graf prosté funkce nejvýše v jednom bodě.
  - f je ryze monotónní $\Rightarrow$ f je prostá.
  - Opak (f je prostá $\Rightarrow$ f je ryze monotónní) **neplatí.**

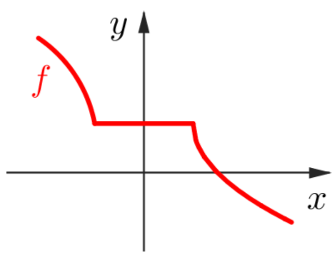


f je na $\langle -3, 2\rangle$ prostá, ale není na $\langle -3, 2\rangle$ ryze monotónní.

- **neklesající** – $\forall x_1, x_2 \in M: \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$
- **nerostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M: \boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)}$



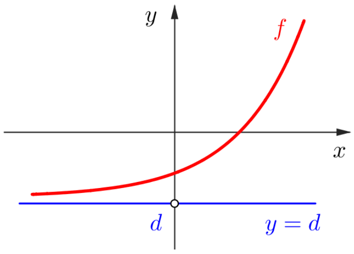
Neklesající funkce



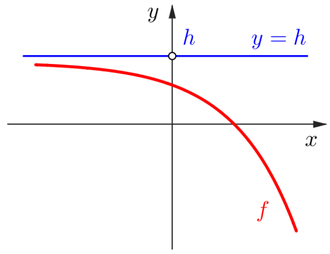
Nerostoucí funkce

- **monotónní**, je-li neklesající nebo nerostoucí

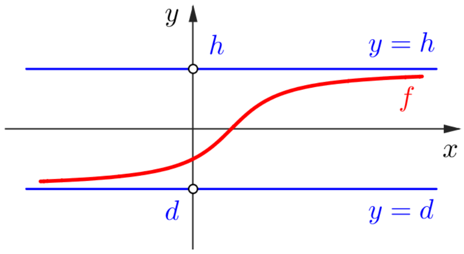
- **zdola ohraničená** – $\exists\, d \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{f(x) \geq d}\ \ \forall x \in M$
- **shora ohraničená** – $\exists\, h \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{f(x) \leq h}\ \ \forall x \in M$
- **ohraničená** – $\exists\, d, h \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{d \leq f(x) \leq h}\ \ \forall x \in M$



Zdola ohraničená funkce



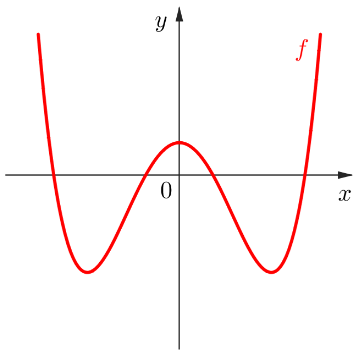
Shora ohraničená funkce



Ohraničená funkce

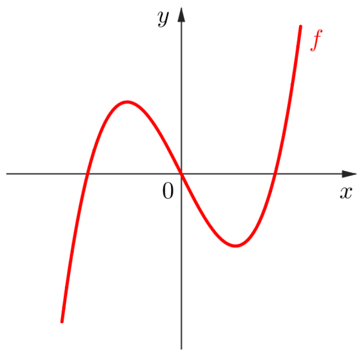
1.2 Základní vlastnosti funkcí

- **Sudá**
  1. $x \in M \Rightarrow -x \in M$
  2. $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}\ \ \forall x \in M$
  – graf je symetrický vzhledem k ose y



Sudá funkce

- **Lichá**
  1. $x \in M \Rightarrow -x \in M$
  2. $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}\ \ \forall x \in M$
  – graf je symetrický vzhledem k počátku



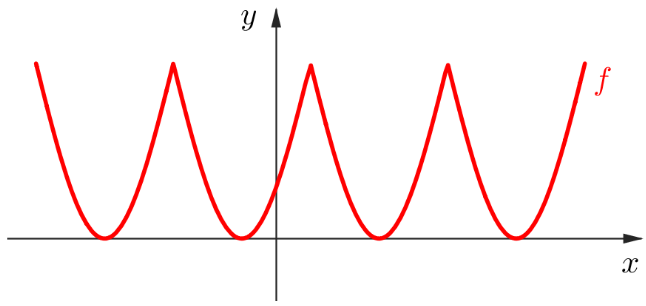
Lichá funkce

- **Periodická**

  $\exists\, p \in \mathbb{R}^+ :$

  1. $x \in M \Rightarrow x + p \in M$
  2. $\boldsymbol{f(x+p) = f(x)} \quad \forall x \in M$

  – $p \ldots$ **perioda**



Periodická funkce

Příklad

Určete, zda je funkce lichá nebo sudá.

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^3}$

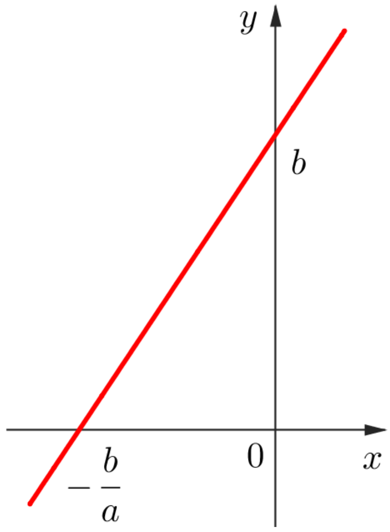
b) $f(x) = \dfrac{1+x^4}{1-x^2}$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

1.3 Elementární funkce

Lineární funkce $\boldsymbol{y = ax + b}$

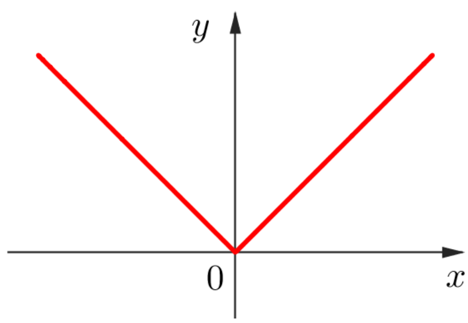
- $a, b \in \mathbb{R}$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: přímka
- $a = 0$: **Konstantní funkce** $\boldsymbol{y = b}$
- $b = 0$: **Přímá úměrnost** $\boldsymbol{y = ax}$



1.3 Elementární funkce

Absolutní hodnota $\boldsymbol{y = |x|}$

- $D(f) = \mathbb{R}$

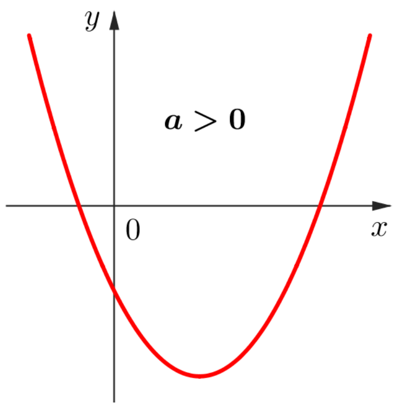


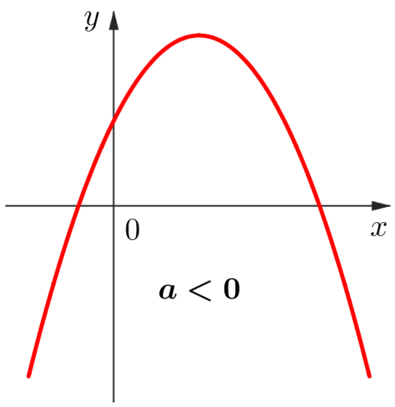
Poznámka:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$

- $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola



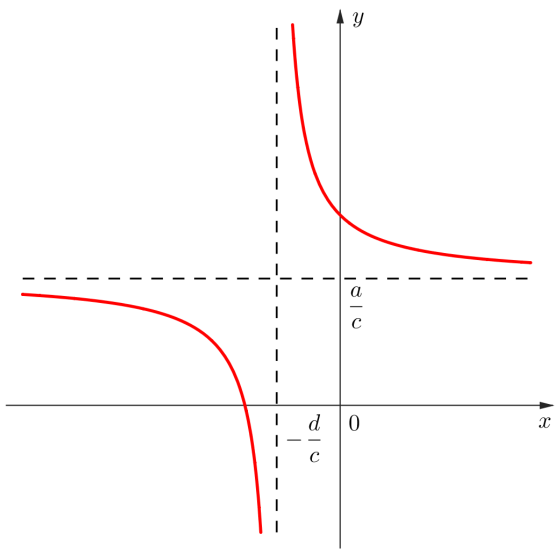


Lineární lomená funkce $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

- $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ c \neq 0,\ ad - bc \neq 0$
- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$
- graf: rovnoosá hyperbola
- zvláštní případ:

  Nepřímá úměrnost $y = \dfrac{k}{x}$

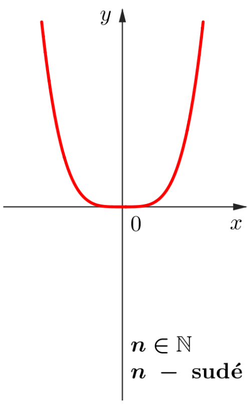
  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

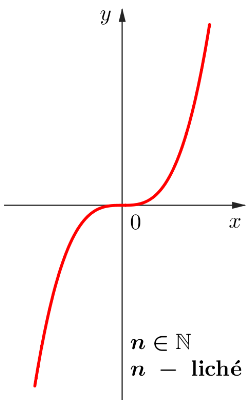


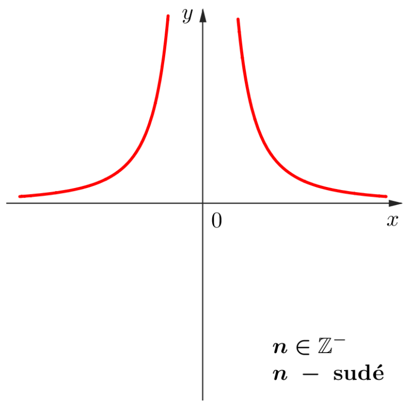
Mocninná funkce $y = x^n$

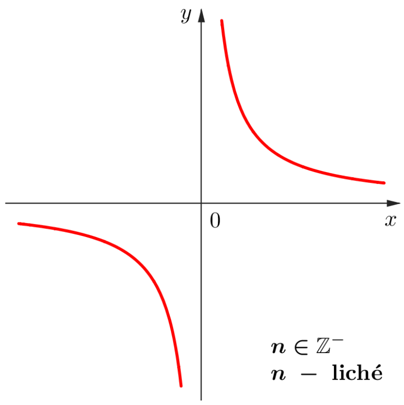
- $n \in \mathbb{N}$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola n-tého stupně

- $n \in \mathbb{Z}^-$
- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- graf: hyperbola n-tého stupně





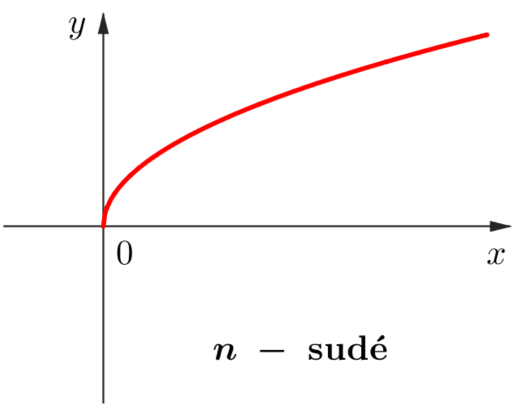


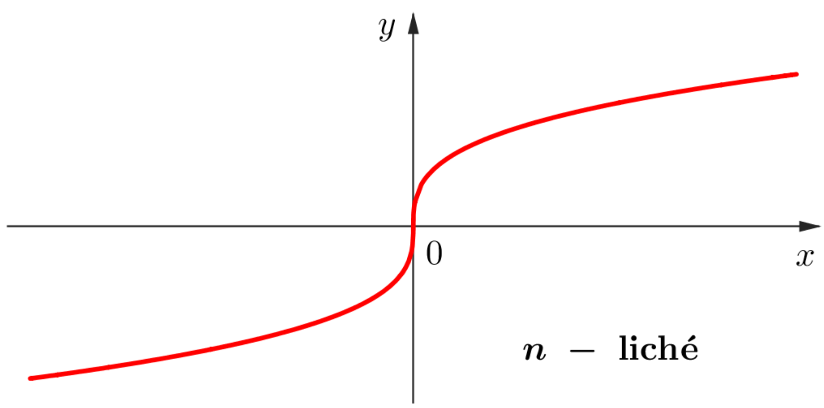


n-tá odmocnina $y = \sqrt[n]{x}$

- $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$
- graf: parabola n-tého stupně

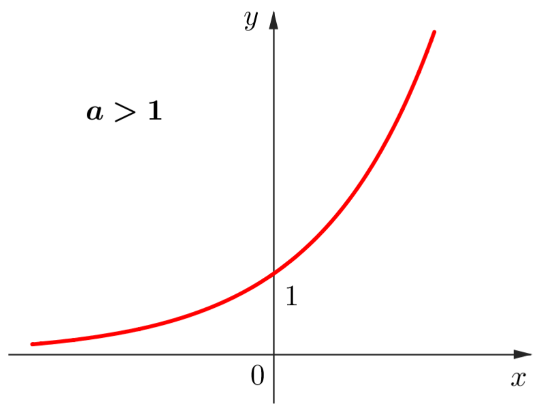
- n sudé … $D(f) = \mathbb{R}_0^+$
- n liché … $D(f) = \mathbb{R}$

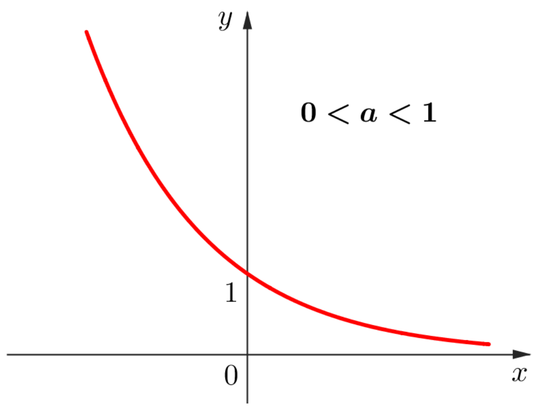




Exponenciální funkce $y = a^x$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \mathbb{R}^+$





$\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}:$

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

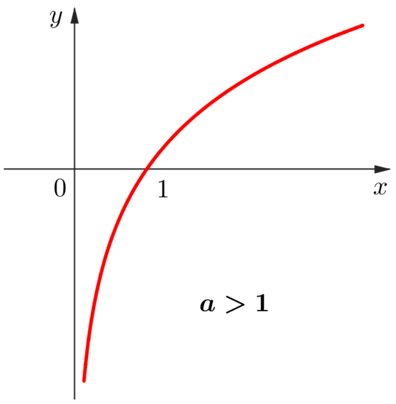
$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$

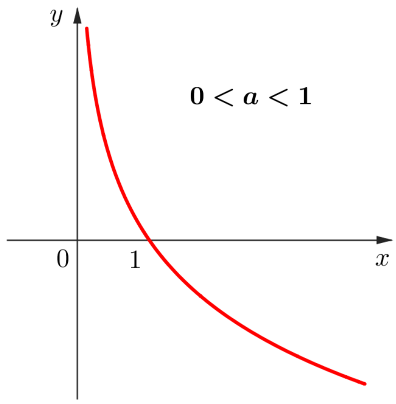
$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

Logaritmická funkce $\boldsymbol{y = \log_a x}$ $\quad \dots \quad a^y = x$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $D(f) = \mathbb{R}^+, \quad H(f) = \mathbb{R}$
- **Přirozený logaritmus**: $\boldsymbol{y = \ln x} = \log_e x, \quad e \doteq 2,71$
- **Dekadický logaritmus**: $\boldsymbol{y = \log x} = \log_{10} x$





1.3 Elementární funkce → Logaritmická funkce

$\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}:$

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

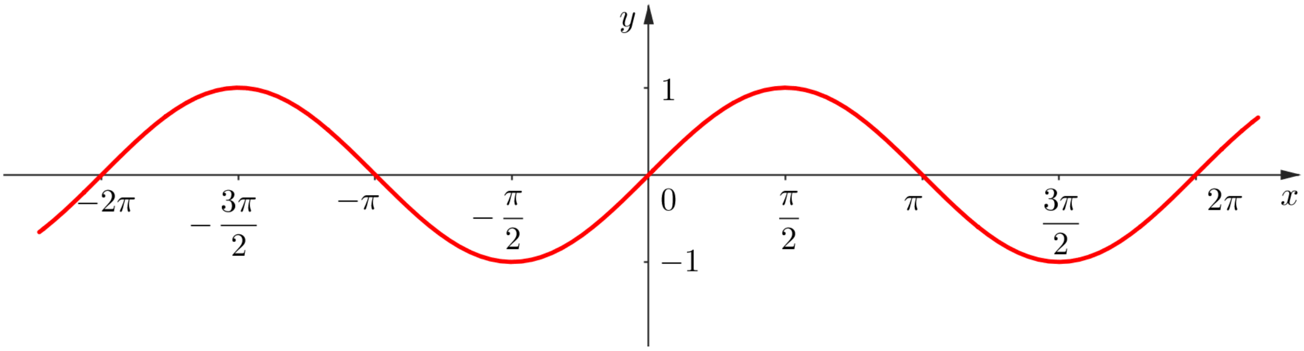
$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Sinus $y = \sin x$

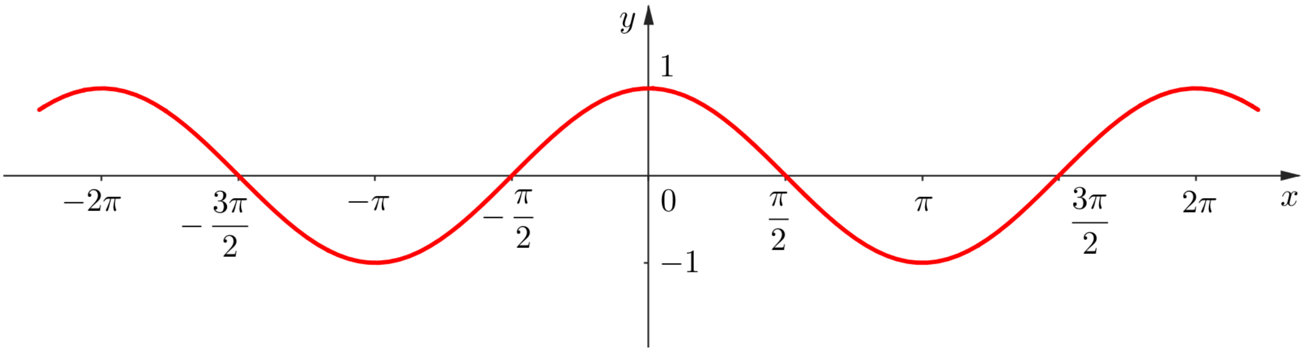
- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- lichá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou 2π



1.3 Elementární funkce → Goniometrické funkce

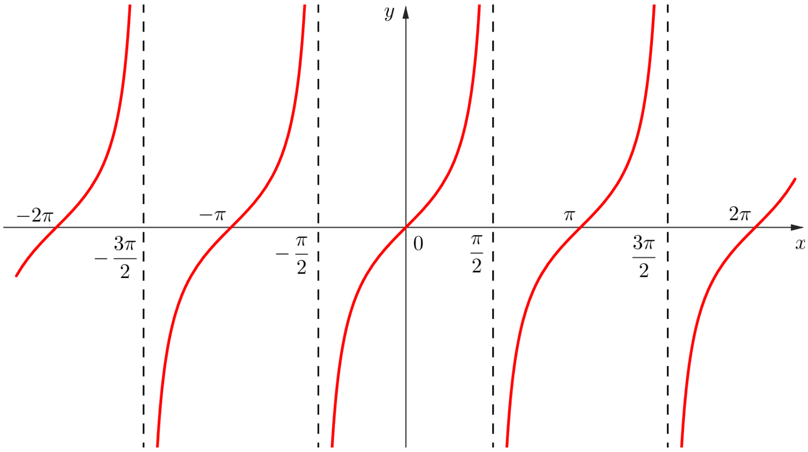
Kosinus $y = \cos x$

- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- sudá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou 2π



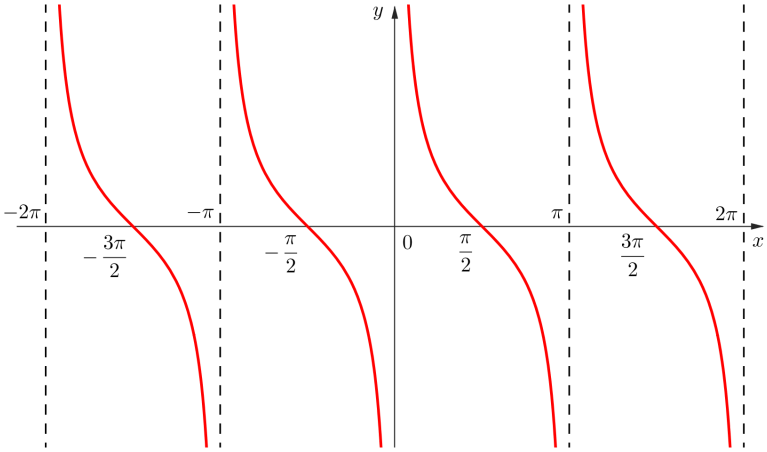
Tangens $\boldsymbol{y = \operatorname{tg} x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad H(f) = \mathbb{R}$
- lichá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou π



Kotangens $\boldsymbol{y = \operatorname{cotg} x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad H(f) = \mathbb{R}$
- lichá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou π



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/
$\operatorname{cotg} x$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

1.4 Parametrické zadání funkce

Proměnné x a y vyjádříme pomocí nové proměnné t:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}$$

Přirozená parametrizace:

$$\begin{array}{l} y = f(x), \quad x \in \langle a, b\rangle \\ \quad\downarrow \\ x = t \\ y = f(t), \quad t \in \langle a, b\rangle \end{array}$$

DĚKUJI
ZA
POZORNOST!