Příklady na procvičení

1. Vypočtěte:

   (a) statický moment vyhledem k ose y křivky $\gamma\colon x = 1 - 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \langle 0, \pi\rangle$, funkce hustoty je $\sigma(x, y) = y$. $[8]$

   (b) délku křivky $\gamma\colon x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

2. Vypočtěte křivkový integrál:

   (a) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{x}\,\mathrm{d}s, \quad \gamma : x = 1 - \cos t,\ y = t - \sin t,\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle.$ $\left[\sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)\right]$

   (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x}{y+1}\,\mathrm{d}s, \quad \gamma : x = -2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle.$ $[-\ln 9]$

   (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x}{y+1}\,\mathrm{d}s, \quad \gamma : x = -\cos t,\ y = \sin t,\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle.$ $\left[\ln\dfrac{1}{2}\right]$

   (d) $\displaystyle\int_\gamma 2(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (2y - 8)\,\mathrm{d}y, \quad \gamma : x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0,$ od bodu $A[2; ?]$ $[-32]$

   (e) $\displaystyle\int_\gamma y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y, \quad \gamma :$ oblouk křivky $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, od bodu $A[?; 2]$ přes bod $B[\sqrt{2}; ?]$ do bodu $C[1; -\sqrt{2}]$ $\left[-\sqrt{2}\right]$

   (f) $\displaystyle\int_\gamma xy\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y, \quad \gamma : y = \mathrm{arctg} x,$ od bodu $A[1; ?]$ do bodu $B[0; ?]$ $\left[-\dfrac{1}{192}(\pi^3 + 48\pi - 96)\right]$

   (g) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{y}\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\,\mathrm{d}y,$ γ je kladně orientovaná hranice oblasti: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $x \leq y \leq x\sqrt{3}$ $\left[\dfrac{1}{12}\pi \cdot \ln 2\right]$

   (h) $\displaystyle\int_\gamma (xy + x^2)\,\mathrm{d}x + x^2 y\,\mathrm{d}y,$ γ je kladně orientovaná hranice oblasti: $0 \leq x \leq y \leq 1$ $\left[\dfrac{1}{12}\right]$

   (i) $\displaystyle\int_\gamma (x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y$ po záporně orientované křivce γ tvořené obloukem funkce $y = \cos x$ a úsečkou na ose x pro $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. $[-4]$

   (j) $\displaystyle\int_\gamma (xy + x^2)\,\mathrm{d}x + x^2 y\,\mathrm{d}y$ po kladně orientované křivce γ tvořené hranicí trojúhelníku ABC s vrcholy $A[0, 0], B[1, 0], C[1, 1]$. $\left[\dfrac{1}{12}\right]$

   (k) $\displaystyle\int_\gamma (x - y)\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y$ po kladně orientované křivce γ tvořené hranicí oblasti: $y \geq x^2 - 1,\ y \leq 0.$ $\left[\dfrac{4}{3}\right]$

3. Ověřte, že je daný integrál nezávislý na integrační cestě, a poté jej vypočtěte:

(a) $\int\limits_\gamma \frac{1-y^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2y}{1+x}\,\mathrm{d}y,$ od bodu $A[0;0]$ do $B[1;1]$ $[1]$

(b) $\int\limits_\gamma \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$ od bodu $A[-2;-6]$ do $B[1;0]$ $\left[-\frac{1}{2}\ln 40\right]$

(c) $\int\limits_\gamma (2y-6xy^3)\,\mathrm{d}x + (2x-9x^2y^2)\,\mathrm{d}y,$ od bodu $A[0;0]$ do $B[2;2]$ $[-88]$

(d) $\int\limits_\gamma \frac{2-y^2}{2(1+x)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{1+x}\,\mathrm{d}y,$ od bodu $A[0;0]$ do $B[1;1]$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

(e) $\int\limits_\gamma \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)\mathrm{d}y,$ od bodu $A[3;4]$ do $B[5;12]$ $[56]$

(f) $\int\limits_\gamma xy^2\,\mathrm{d}x + (yx^2+y)\,\mathrm{d}y$ od bodu $A[0;1]$ do $B[2;2]$ $\left[\frac{19}{2}\right]$

(g) $\int\limits_\gamma (2xy+x)\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$ od bodu $A[0;1]$ do $B[2;2]$ $\left[\frac{37}{3}\right]$

(h) $\int\limits_\gamma (2xy+x)\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$ od bodu $A[1;1]$ do $B[1;2]$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

4. Řešte diferenciální rovnici se separova(tel)nými proměnnými:

(a) $(1+x)\cdot y' = 2y$ $\left[y = c\cdot(1+x)^2, c\in\mathbf{R}\right]$

(b) $(1+x)\cdot y' = y-1$ $\left[y = k\cdot(1+x)+1, c\in\mathbf{R}\right]$

(c) $y' = 2\sqrt{y-1}$ $\left[y = (x+c)^2+1 \quad \text{a} \quad y=1, c\in\mathbf{R}\right]$

(d) $y' = -\frac{x}{y}$ $[y = \quad, c\in\mathbf{R}]$

(e) $y'\cdot\sqrt{1-x^2} = y^2+1$ $[y = \mathrm{tg}(\arcsin x + c), c\in\mathbf{R}, x\in(-1;1)]$

(f) $y' = 2\sqrt{y}\cdot\ln x$ $\left[y = (x\cdot\ln x - x + c)^2, c\in\mathbf{R}, x\in(0;\infty)\right]$

(g) $y' = 10^{x+y}$ $\left[y = \log(-10^x - c)^{-1}, c\in\mathbf{R}\right]$

(h) $\cos x\cdot\cos y\cdot y' = \sin x\cdot\sin y$ $\left[y = \arcsin\frac{c}{\cos x}, c\in\mathbf{R}\right]$

(i) $(1+x)\cdot y' = 1-y$ $\left[y = \frac{k}{1+x}+1, c\in\mathbf{R}\right]$

5. Najděte obecné a partikulírní řešení diferenciální rovnice:

(a) $y' = \mathrm{e}^x - y\mathrm{e}^x,\ y(0)=2.$ $\left[y = 1+\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}\cdot k, k\in\mathbf{R};\ y_P = 1+\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x+1}\right]$

(b) $y' + \sin x\cdot(y-1) = 0,\ y(\pi)=2.$ $\left[y = k\cdot\mathrm{e}^{\cos x}+1, k\in\mathbf{R};\ y_P = \mathrm{e}^{\cos x+1}+1\right]$

(c) $y' = \frac{1-x^2}{xy},\ y(1)=2.$ $\left[y = \pm\sqrt{\ln x^2 - x^2 + k}, \ln x^2 - x^2 + k > 0;\ y_P = \sqrt{\ln x^2 - x^2 + 5}\right]$

(d) $y' + y\cdot\sin x = \sin x,\ y(\pi)=0.$ $\left[y = k\cdot\mathrm{e}^{\cos x}+1, k\in\mathbf{R};\ y_P = -\mathrm{e}^{\cos x+1}+1\right]$

(e) $y' = \mathrm{e}^x(1-y),\ y(0)=0.$ $\left[y = 1+\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}\cdot k, k\in\mathbf{R};\ y_P = -\mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^x}+1\right]$

(f) $y' + \cos x\cdot(y-1) = 0,\ y(0)=2.$ $[y =, k\in\mathbf{R};\ y_P =]$

Řešení

Vypočtěte křivkový integrál:

2b) $$\int\limits_{\gamma} \frac{x}{y+1}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2\cos t}{2\sin t+1}\,2\,\mathrm{d}t = -2\Big[\ln|2\sin t+1|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\Big[\ln 3-\ln 1\Big] = -2\cdot\Big(\ln 3-0\Big) =$$

$$= -2\cdot\ln 3 = -\ln 9$$

$$\gamma:\quad \begin{array}{lll} x=-2\cos t & x'=2\sin t & \mathrm{d}s=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\sqrt{4}\,\mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}t \\ y=2\sin t & y'=2\cos t & \\ 0\le t\le \frac{\pi}{2} & & \end{array}$$