BAA101 Matematika I

Determinanty, Soustavy lineárních rovnic

Determinanty
Gaussova eliminační metoda

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Definice determinantu

Definice

Determinant n-tého řádu je schéma tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

kterému je přiřazena (jednoznačně určená) hodnota (číslo).

Stručný zápis: $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{a_{ij}}|$, kde $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n.

Definice determinantu

Determinant 1. řádu:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Determinant 2. řádu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Křížové pravidlo

Vlastnosti determinantů

- Je-li determinant ve schodovitém tvaru, pak je jeho hodnota rovna součinu prvků na hlavní diagonále.
- Determinant je roven nule, jestliže
  - obsahuje nulový řádek (sloupec),
  - obsahuje dva stejné řádky (sloupce),
  - některý řádek (sloupec) je roven $k-$násobku jiného řádku (sloupce).

Vlastnosti determinantů

Úpravy determinantů

- které nemění hodnotu determinantu:
  1. Výměna řádků za sloupce (transponování).
  2. Přičtení k-násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci).
- které mění hodnotu determinantu
  3. Záměna dvou řádků (sloupců) změní znaménko determinantu.
  4. Vynásobíme-li některý řádek (sloupec) determinantu číslem k, je hodnota nově vzniklého determinantu rovna k-násobku hodnoty původního determinantu.

Výpočet determinantu

Příklad

Vypočtěte determinant pomocí úpravy na schodovitý tvar $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 19 \end{vmatrix}$

Vlastnosti determinantů

Věta

Čtvercová matice A je

- regulární $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.
- singulární $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$.

Vlastnosti determinantů

Platí

$A,\ B$ jsou čtvercové matice řádu n; $k, \ell \in \mathbb{R}$

1. $A = B \ \Rightarrow\ |A| = |B|$
2. $|kA| = k^n |A|$
3. $|A^T| = |A|$
4. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
5. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

Výpočet determinantu

Definice

Subdeterminant $\boldsymbol{A_{ij}}$ přidružený k prvku a_{ij} je determinant, který vznikne z determinantu $|A| = |a_{ij}|$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce, tj. řádku a sloupce, ve kterém leží prvek a_{ij}.

Definice

Algebraický doplněk $\overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{ij}}$ prvku a_{ij}:

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{ij}}$$

Výpočet determinantu

Věta (**Laplaceův rozvoj**)

Determinant je roven součtu součinů prvků libovolného, ale pevně zvoleného řádku (sloupce) s příslušnými algebraickými doplňky.

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_j \boldsymbol{a}_{ij}\overline{\boldsymbol{A}}_{ij} = \sum_i \boldsymbol{a}_{ij}\overline{\boldsymbol{A}}_{ij}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \underbrace{\sum_j (-\mathbf{1})^{i+j}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}}_{\text{podle řádku}} = \underbrace{\sum_i (-\mathbf{1})^{i+j}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}}_{\text{podle sloupce}}$$

Výpočet determinantu

Příklad

Vypočtěte determinant pomocí Laplaceova rozvoje $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Výpočet determinantu

Příklad

Vypočtěte determinant pomocí úprav a Laplaceova rozvoje

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Soustavy lineárních rovnic

Definice

Soustava m **lineárních rovnic** o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ má tvar

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ … **koeficienty**
$b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ … **absolutní členy**

$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ … **homogenní soustava**
alespoň jedno $b_i \neq 0$ … **nehomogenní soustava**

Soustavy lineárních rovnic

Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy

$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Soustavy lineárních rovnic

Vektor neznámých

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_m} \end{pmatrix}$$

Soustavu můžeme psát v maticovém tvaru $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

Soustavy lineárních rovnic

Definice

Uspořádanou n-tici čísel $X = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ nazýváme **řešením** soustavy $A \cdot X = B$, jestliže po dosazení r_1 za x_1, r_2 za x_2, $\ldots$, r_n za x_n do $A \cdot X = B$ dostaneme m identit.

Frobeniova věta !

Soustava lineárních rovnic $A \cdot X = B$

- má řešení $\Leftrightarrow$ $h(A) = h(A_r) = h$
  - $h = n$ $\ldots$ právě jedno řešení
  - $h < n$ $\ldots$ nekonečně mnoho řešení,
    $n - h$ neznámých volíme jako parametry
- nemá řešení $\Leftrightarrow$ $h(A) \neq h(A_r)$, tj. $h(A_r) = h(A) + 1$

Soustavy lineárních rovnic

Poznámka

Homogenní soustava má vždy řešení, neboť $h(A) = h(A_r)$ platí vždy.

- $h(A) = n$ … jedno **nulové** (**triviální**) **řešení** $X = (0, 0, \ldots, 0)$
- $h(A) < n$ … nekonečně mnoho řešení, která závisejí na $n - h$ parametrech

Gaussova eliminační metoda

Rozšířenou matici soustavy $A \cdot X = B$ upravíme na schodovitý tvar.

$\downarrow$

Dostaneme rozšířenou matici nové „jednodušší“ soustavy, která má stejnou množinu řešení, jako soustava původní.

Gaussova eliminační metoda - příklady

Příklad

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavy. Podle Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

a)
$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 0 \\ -x - 2y - z - 3u &= -1 \\ 2x - y + 2z - 4u &= -3 \\ 3x + 2y + z + u &= 7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 2y - z + 3u &= 5 \\ 2x + 5y + z - 2u &= 0 \\ x + 3y + 2z - 5u &= -5 \\ 3x + 8y + 3z - 7u &= -5 \end{aligned}$$

Gaussova eliminační metoda

Příklad

Udejte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která:

a) má právě jedno řešení;

b) má nekonečně mnoho řešení;

c) nemá řešení.

Příklad

Rozložte funkci $f(x)$ na parciální zlomky.

$$f(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 + 6x - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$$