

BAA101 Matematika I

Matice - úvod

Inverzní matice, maticové rovnice

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Definice

Matice typu (m, n) , kde $m, n \in \mathbb{N}$ je uspořádaná soustava $m \cdot n$ čísel zapsaných ve tvaru tabulky do m řádků a n sloupců:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$... **prvky matice**

a_{ij} ... prvek ležící v i -tém řádku a j -tém sloupci

– i ... **řádkový index**

– j ... **sloupcový index**

Stručný zápis: A , (a_{ij}) , $(a_{ij})_m^n$

$m \neq n \dots$ **obdélníková matice**

$m = n \dots$ **čtvercová matice n -tého řádu**

- $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \dots\dots$ **hlavní diagonála**
- $a_{n1}, a_{2,n-2}, \dots, a_{n1} \dots$ **vedlejší diagonála**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Speciální matice

- **Řádková matice** (řádkový vektor)
 - matice typu $(1, n)$
- **Sloupcová matice** (sloupcový vektor)
 - matice typu $(m, 1)$
- **Nulová matice**
 - $a_{ij} = 0 \quad \dots$ všechny prvky jsou rovny nule
 - značíme O

Speciální čtvercové matice

■ Diagonální matice

- $\begin{cases} a_{ij} \neq 0 & \text{pro } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$... všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové

■ Jednotková matice

- $\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{pro } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$... diagonální matice, kde všechny prvky hlavní diagonály jsou rovny jedné
- značíme E

1) Rovnost matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

2) Součet matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n, C = (c_{ij})_m^n$$

$$A + B = C \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

3) Násobení matice číslem k (k -násobek matice)

$$A = (a_{ij})_m^n, C = (c_{ij})_m^n$$

$$kA = C \Leftrightarrow ka_{ij} = c_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

4) Rozdíl matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n$$

$$A - B = A + (-B)$$

kde $-B = (-1) \cdot B$... **opačná matice** k matici B

Platí

A, B, C, O jsou matice téhož typu; $k, \ell \in \mathbb{R}$

1. $A + B = B + A$ (komutativní zákon)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativní zákon)
3. $A + O = A$
4. $A + (-A) = O$
5. $1 \cdot A = A$
6. $k(\ell A) = (k\ell)A$ (asociativní zákon pro násobení číslem)
7. $(k + \ell)A = kA + \ell A$ (1. distributivní zákon pro násobení matice číslem)
8. $k(A + B) = kA + kB$ (2. distributivní zákon pro násobení matice číslem)

5) Součin matic

$$A = (a_{ij})_m^n, \quad B = (b_{jk})_n^p, \quad C = (c_{ik})_m^p$$

$$A \cdot B = C \Leftrightarrow c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p$

$$\begin{array}{c} i\text{-tý řádek} \end{array} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix} \begin{array}{c} k\text{-tý sloupec} \\ \begin{pmatrix} \vdots & b_{1k} & \vdots \\ \vdots & b_{2k} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nk} & \vdots \end{pmatrix} \\ k\text{-tý sloupec} \end{array} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \cdots & c_{ik} & \cdots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix} \begin{array}{c} i\text{-tý řádek} \end{array}$$

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vypočtete:

- a) $A \cdot B$
- b) $B \cdot A$

Poznámka: Násobení matic obecně není komutativní, tj. obecně **neplatí**

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Definice

Čtvercové matice A, B řádu n se nazývají **zaměnitelné** (**komutativní**), jestliže platí $A \cdot B = B \cdot A$.

Platí

A, O, E – čtvercové matice řádu n

1. $A \cdot O = O \cdot A = O$
2. $A \cdot E = E \cdot A = A$

Platí

A, B, C – matice vhodných typů; $k \in \mathbb{R}$

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ *(asociativní zákon)*
2. $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$ *(asociativní zákon pro násobení
součinu matic číslem)*
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ *(1. distributivní zákon)*
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *(2. distributivní zákon)*

6) Mocnina matice

$$A^0 = E$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

$$\vdots$$

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$$

7) Transponování matice

$$A = (a_{ij})_m^n$$

$$A \rightarrow A^T \quad \dots \quad a_{ij} = a_{ji}^T$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

– A^T je typu (n, m) ... **transponovaná matice** k matici A

Platí

A, B, C – matice vhodných typů; $k \in \mathbb{R}$

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$
4. $(kA)^T = kA^T$

Definice

Hodnost matice A je celé nezáporné číslo, udávající maximální počet lineárně nezávislých řádků / sloupců matice A .

Značíme $h(A)$.

Platí:

A je matice typu (m, n) , O je nulová matice

- $0 \leq h(A) \leq \min(m, n)$
- $h(O) = 0$
- $h(A^T) = h(A)$

Elementární úpravy matice

1. Výměna řádků / sloupců.
2. Vynásobení řádku / sloupce nenulovým číslem.
3. Přičtení k -násobku jednoho řádku / sloupce k ℓ -násobku jiného řádku / sloupce.

Věta

Elementární úpravy nemění hodnotu matice.

Schodovitá matice

- každý řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí
- $h(A) = \text{"počet nenulových řádků"}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá

- **regulární**, jestliže $h(A) = n$
- **singulární**, jestliže $h(A) < n$
→ číslo $n - h(A)$ nazýváme **defekt** (**nulita**) matice A

Příklad

Určete hodnotu matice:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice

Nechť A je čtvercová matice. Existuje-li matice A^{-1} taková, že platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

kde E je jednotková matice, nazýváme A^{-1} **inverzní matice** k matici A .

Věta

Inverzní matice k matici A existuje právě tehdy, když matice A je regulární.

Věta

Nechť A je regulární matice. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.

Platí

A, B jsou regulární matice stejného řádu, $k \neq 0$ je reálné číslo.

1. $E^{-1} = E$

2. $(A^{-1})^{-1} = A$

3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

4. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

5. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Výpočet inverzní matice:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{E} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{elementární řádkové úpravy}} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right)$$

Řešení maticové rovnice o jedné neznámé matici X :

1. Z maticové rovnice osamostatníme neznámou matici X .
2. Neznámou matici X vypočítáme.

Příklad

Z maticové rovnice osamostatněte neznámou matici X .

a) $X \cdot A = B$

b) $A \cdot X \cdot B = C$

c) $A \cdot X - 2B = C$

Příklad

Řešte maticovou rovnici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad

Řešte soustavu maticových rovnic.

$$\begin{aligned} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y &= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**DĚKUJI
ZA
POZORNOST!**