# Skalární součin vektorů

**Skalárním součinem** nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V(\mathbb{E}_3)$ rozumíme číslo (skalár)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi,$$

kde $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ jsou jejich délky.

**Výpočet:**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

**Využití:**

1. Vyšetřování kolmosti nenulových vektorů:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

2. Výpočet délky nenulového vektoru:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \|\vec{u}\|$$

3. Výpočet úhlu nenulových vektorů:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}, \qquad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle.$$

# Vektorový součin vektorů

**Vektorovým součinem** vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V(\mathbb{E}_3)$ rozumíme vektor označovaný jako $\vec{u} \times \vec{v}$.

**Výpočet:** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

*Determinant vypočteme pomocí Laplaceova rozvoje podle prvního řádku.*

**Využití:**

- Vyšetřování kolinearity nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi, \text{ tj. } \vec{u} = k\vec{v}).$$

- Výpočet obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$S = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Výpočet obsahu trojúhelníku určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Nalezení vektoru kolmého ke dvěma daným nenulovým vektorům.

# Smíšený součin vektorů

**Smíšeným součinem** vektorů $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ (v tomto pořadí) nazveme číslo

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

**Využití:**

1. Výpočet objemu rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$V = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

2. Výpočet objemu čtyřstěnu určeného vektory $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$:

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

3. Vyšetřování komplanárnosti vektorů:

$$\text{Nenulové vektory } \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ jsou komplanární} \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0$$

**Výpočet:** $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\vec{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$

- $\boldsymbol{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$