



BAA001 Matematika I

Skalární, vektorový a smíšený součin

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Skalární součin vektorů



Definice

Skalárním součinem nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ rozumíme číslo (skalár)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \varphi,$$

kde $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ jsou jejich délky.
Je-li alespoň jeden z vektorů nulový, klademe $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Věta

Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ a libovolné vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ platí:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,
3. $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad (\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}).$

Využití:

1. Vyšetřování kolmosti nenulových vektorů:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

2. Výpočet délky nenulového vektoru:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \|\vec{u}\|$$

3. Výpočet úhlu nenulových vektorů:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}, \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Výpočet

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3]$$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

- Délka úsečky AB:

$$|AB| = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Definice

Vektorovým součinem vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ rozumíme vektor $\vec{u} \times \vec{v}$.

- Je-li alespoň jeden z vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ nulový nebo jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ kolineární, pak $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$.
- V opačném případě požadujeme, aby měl vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ následující vlastnosti:
 1. Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}, \vec{v}$.
 2. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ tvoří v tomto pořadí pozitivní trojici vektorů (platí pravidlo pravé ruky).
 3. Délka vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$, tj.

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \varphi,$$

kde $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.

Vektorový součin vektorů

Věta

Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$,
2. $\alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v})$,
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$,
4. $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$.

Pozor!

- $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$,
- $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$,
- Neplatí: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow (\vec{u} = \vec{o} \text{ nebo } \vec{v} = \vec{o})$.

Využití:

- Vyšetřování kolinearity nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi, \text{ tj. } \vec{u} = k\vec{v}).$$

- Výpočet obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$:

$$S = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Výpočet obsahu trojúhelníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Nalezení vektoru kolmého ke dvěma daným nenulovým vektorům.

Výpočet

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Determinant vypočteme pomocí Laplaceova rozvoje podle prvního řádku.

Příklad

Jsou dány vektory $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, -1, 3)$.

- Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ kolineární.
- Vypočtete obsah rovnoběžníku nad vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.
- Určete vektor $\vec{x}$ kolmý k vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$ délky 15.

Příklad

Jsou dány body $A = [1, 2, 0]$, $B = [-1, 1, 3]$, $C = [1, 3, -1]$. Určete

- obsah $\triangle ABC$,
- délky stran $\triangle ABC$,
- délky výšek $\triangle ABC$,
- velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$.

Definice

Smíšeným součinem vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (v tomto pořadí) nazveme číslo

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Poznámka:

1. Platí $\vec{c} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{c}$. Proto

$$[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

2. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}].$

Využití:

- Výpočet objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

- Výpočet objemu čtyřstěnu určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

- Vyšetřování komplanárnosti vektorů:

Nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jsou komplanární $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

Výpočet

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Příklad

Jsou dány vektory $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

- Určete vektor $\vec{c} : c_1 + 2c_2 + c_3 = 12$ takový, že $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.
- Vypočtete objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
- Vypočtete obsah základny určené vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a výšku rovnoběžnostěnu nad touto základnou.

Příklad

Jsou dány body $A = [3, 5, 3]$, $B = [-2, 11, -5]$, $C = [1, -1, 4]$,
 $V = [0, 6, 4]$.

- Ověřte, že vektory $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AV}$ nejsou komplanární.
- Vypočtete objem čtyřstěnu $ABCV$.
- Určete délku výšky čtyřstěnu $ABCV$.