

BAA001 Matematika I

Determinanty, Soustavy lineárních rovnic

Determinanty
Gaussova eliminační metoda
Cramerovo pravidlo

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Definice

Determinant n -tého řádu je schéma tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

kterému je přiřazena (jednoznačně určená) hodnota (číslo).

Stručný zápis: $|A| = |a_{ij}|$, kde $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n .

Determinant 1. řádu:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Determinant 2. řádu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Křížové pravidlo

Vlastnosti determinantů

- Je-li determinant ve schodovitém tvaru, pak je jeho hodnota rovna součinu prvků na hlavní diagonále.
- Determinant je roven nule, jestliže
 - obsahuje nulový řádek (sloupec),
 - obsahuje dva stejné řádky (sloupce),
 - některý řádek (sloupec) je roven k -násobku jiného řádku (sloupce).

Úpravy determinantů

- které nemění hodnotu determinantu:
 1. Výměna řádků za sloupce (transponování).
 2. Přičtení k -násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci).
- které mění hodnotu determinantu
 3. Záměna dvou řádků (sloupců) změní znaménko determinantu.
 4. Vynásobíme-li některý řádek (sloupec) determinantu číslem k , je hodnota nově vzniklého determinantu rovna k -násobku hodnoty původního determinantu.

Příklad

Vypočtete determinant pomocí úpravy na schodovitý tvar $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 19 \end{vmatrix}$

Věta

Čtvercová matice A je

- regulární $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.
- singulární $\Leftrightarrow |A| = 0$.

Platí

A, B jsou čtvercové matice řádu n ; $k, \ell \in \mathbb{R}$

1. $A = B \Rightarrow |A| = |B|$

2. $|kA| = k^n |A|$

3. $|A^T| = |A|$

4. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

5. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Definice

Subdeterminant A_{ij} přidružený k prvku a_{ij} je determinant, který vznikne z determinantu $|A| = |a_{ij}|$ vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce, tj. řádku a sloupce, ve kterém leží prvek a_{ij} .

Definice

Algebraický doplněk $\overline{A}_{ij}$ prvku a_{ij} :

$$\overline{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$$

Věta (Laplaceův rozvoj)

Determinant je roven součtu součinů prvků libovolného, ale pevně zvoleného řádku (sloupce) s příslušnými algebraickými doplňky.

$$|A| = \sum_j a_{ij} \bar{A}_{ij} = \sum_i a_{ij} \bar{A}_{ij}$$

$$|A| = \underbrace{\sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}}_{\text{podle řádku}} = \underbrace{\sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}}_{\text{podle sloupce}}$$

Příklad

Vypočtete determinant pomocí Laplaceova rozvoje $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Příklad

Vypočtete determinant pomocí úprav a Laplaceova rozvoje

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Definice

Soustava m **lineárních rovnic** o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ má tvar

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$... **koeficienty**

$b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$... **absolutní členy**

$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$... **homogenní soustava**

alespoň jedno $b_i \neq 0$... **nehomogenní soustava**

Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy

$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Vektor neznámých

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Soustavu můžeme psát v maticovém tvaru $A \cdot X = B$.

Definice

Uspořádanou n -tici čísel $X = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ nazýváme **řešením** soustavy $A \cdot X = B$, jestliže po dosazení r_1 za x_1 , r_2 za x_2 , $\dots$, r_n za x_n do $A \cdot X = B$ dostaneme m identit.

Frobeniova věta



Soustava lineárních rovnic $A \cdot X = B$

- má řešení $\Leftrightarrow h(A) = h(A_r) = h$
 - $h = n$... právě jedno řešení
 - $h < n$... nekonečně mnoho řešení,
 $n - h$ neznámých volíme jako parametry
- nemá řešení $\Leftrightarrow h(A) \neq h(A_r)$, tj. $h(A_r) = h(A) + 1$

Poznámka

Homogenní soustava má vždy řešení, neboť $h(A) = h(A_r)$ platí vždy.

- $h(A) = n$... jedno **nulové (triviální) řešení** $X = (0, 0, \dots, 0)$
- $h(A) < n$... nekonečně mnoho řešení,
která závisejí na $n - h$ parametrech

Rozšířenou matici soustavy $A \cdot X = B$ upravíme na schodovitý tvar.



Dostaneme rozšířenou matici nové „jednodušší“ soustavy, která má stejnou množinu řešení, jako soustava původní.

Příklad

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavu. Podle Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & x + y + z + u & = 0 \\ & -x - 2y - z - 3u & = -1 \\ & 2x - y + 2z - 4u & = -3 \\ & 3x + 2y + z + u & = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{b)} & x + 2y - z + 3u & = 5 \\ & 2x + 5y + z - 2u & = 0 \\ & x + 3y + 2z - 5u & = -5 \\ & 3x + 8y + 3z - 7u & = -5 \end{array}$$

Příklad

Udejte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která:

- a) má právě jedno řešení;
- b) má nekonečně mnoho řešení;
- c) nemá řešení.

Příklad

Rozložte funkci $f(x)$ na parciální zlomky.

$$f(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 + 6x - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$$

Cramerovo pravidlo

Nechť $|A| \neq 0$. Pak má soustava $A \cdot X = B$ právě jedno řešení $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Přitom $|A_i|$ jsou determinanty vzniklé z determinantu $|A|$ nahrazením i -tého sloupce sloupcem absolutních členů.

Příklad

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavy.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2x_1 + x_2 = 6 \\ & -x_1 - 3x_2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{aligned}$$