



FACULTY OF CIVIL institute  
ENGINEERING of mathematics  
and descriptive geometry

# BAA001 Matematika I

5. Derivace - pokračování.

Využití derivace

Základní věty diferenciálního počtu.

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Předpokládejme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  vlastní derivaci  $f'(x_0)$ .

Pak platí:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

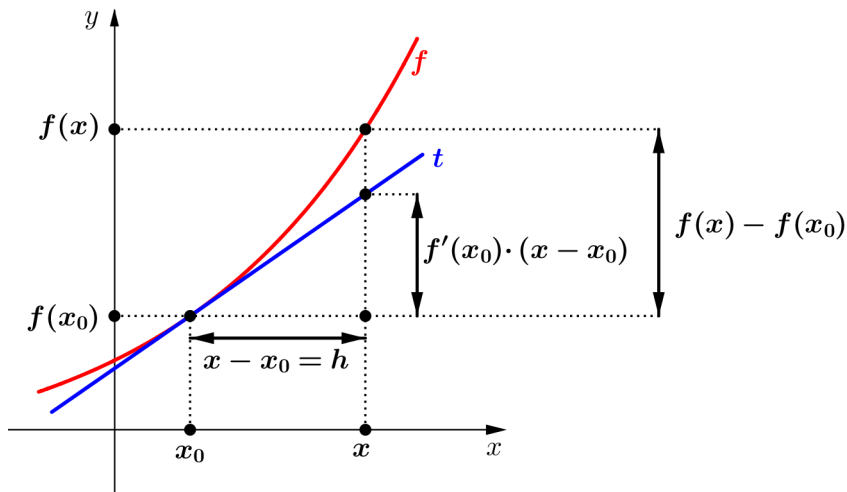
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{P}(x_0, \delta); \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall \mathcal{P}(x_0, \delta)$$

$$\text{tj. } f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních} \\ \text{hodnot}}} \doteq \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních hodnot} \\ \text{na tečně}}} = f'(x_0) \cdot h$$



## Definice

Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci, pak výraz

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$$

nazýváme **diferenciálem funkce  $f$  v bodě  $x_0$**  pro přírůstek  $h$  nezávisle proměnné  $x$ .

## Definice

Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci  $f^{(n)}(x_0)$ , pak výraz

$$d^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$$

nazýváme **diferenciálem  $n$ -tého řádu funkce  $f$  v bodě  $x_0$** .

## Definice

Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci  $f^{(n)}(x_0)$ , pak výraz

$$d^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$$

nazýváme **diferenciálem  $n$ -tého řádu funkce  $f$  v bodě  $x_0$** .

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$$

... diferenciál 1. řádu

$$d^2 f(x_0, h) = f''(x_0) \cdot h^2$$

... diferenciál 2. řádu

$$d^3 f(x_0, h) = f'''(x_0) \cdot h^3$$

... diferenciál 3. řádu

$\vdots$

$$d^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$$

... diferenciál  $n$ -tého řádu

## Definice

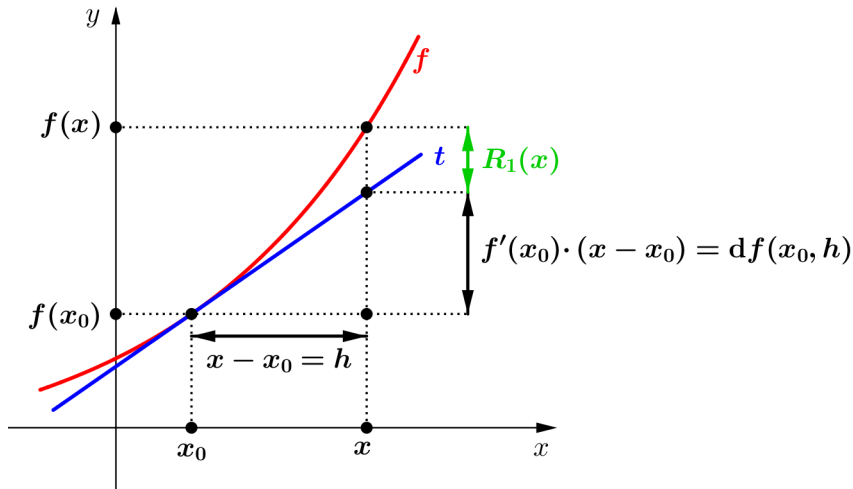
Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivace až do řádu  $n$ , pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

kde  $x_0, x \in \mathbb{R}$ , se nazývá **Taylorův polynom** stupně  $n$  funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

Je-li  $x_0 = 0$  .....  $T_n$  – **Maclaurinův polynom**.

Funkce  $R_n$  definovaná vztahem  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$  ..... **zbytek** řádu  $n$ .



$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  ... tečna  $t$  – lineární aproximace.

## Příklad

Určete Taylorův polynom 5. stupně funkce  $f(x) = (x^2 - x) \ln x$  v bodě  $x_0 = 1$ .

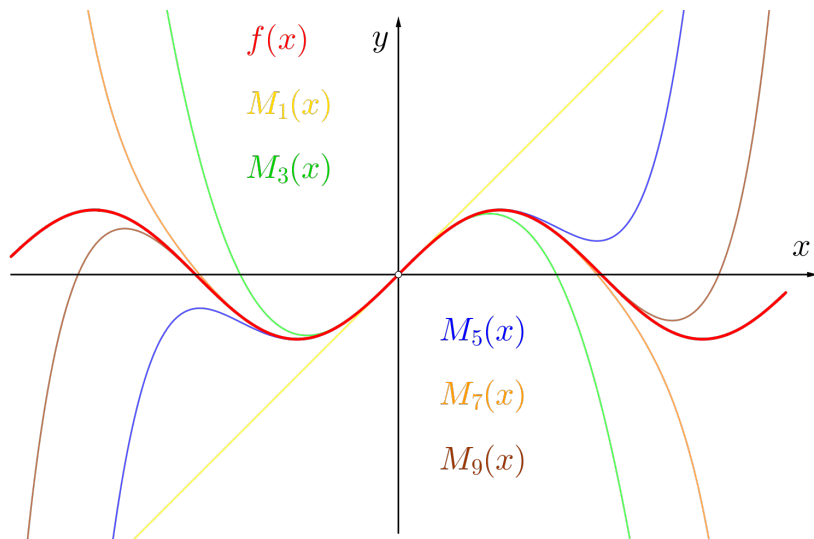
## Příklad

Určete Taylorův polynom 5. stupně funkce  $f(x) = (x^2 - x) \ln x$  v bodě  $x_0 = 1$ .

## Příklad

Určete Maclaurinův polynom 3. stupně funkce  $f(x) = \ln e^4 + e^{2x} \sin 3x$ .

# Maclaurinův polynom funkce $f(x) = \sin x$



$$f(x) = \sin x, x_0 = 0$$

## Věta

Nechť mají funkce  $f$  a  $g$  v prstencovém okolí bodu  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  konečné derivace a necht' platí jedna z podmínek

i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$

ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty.$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , pak existuje také  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

## Příklad

■  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\ln x}$

## Příklad

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^3}{x^3}$

## Příklad

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^3}{x^3}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$$

## Příklad

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^3}{x^3}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

- [1] Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008. ISBN: 978-80-7204-982-0

**Děkuji  
za  
pozornost!**