

BAA001 Matematika I

5. Derivace - pokračování. Využití derivace Základní věty diferenciálního počtu.

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Brno, 2024

Diferenciál funkce - úvod

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$.
Pak platí:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

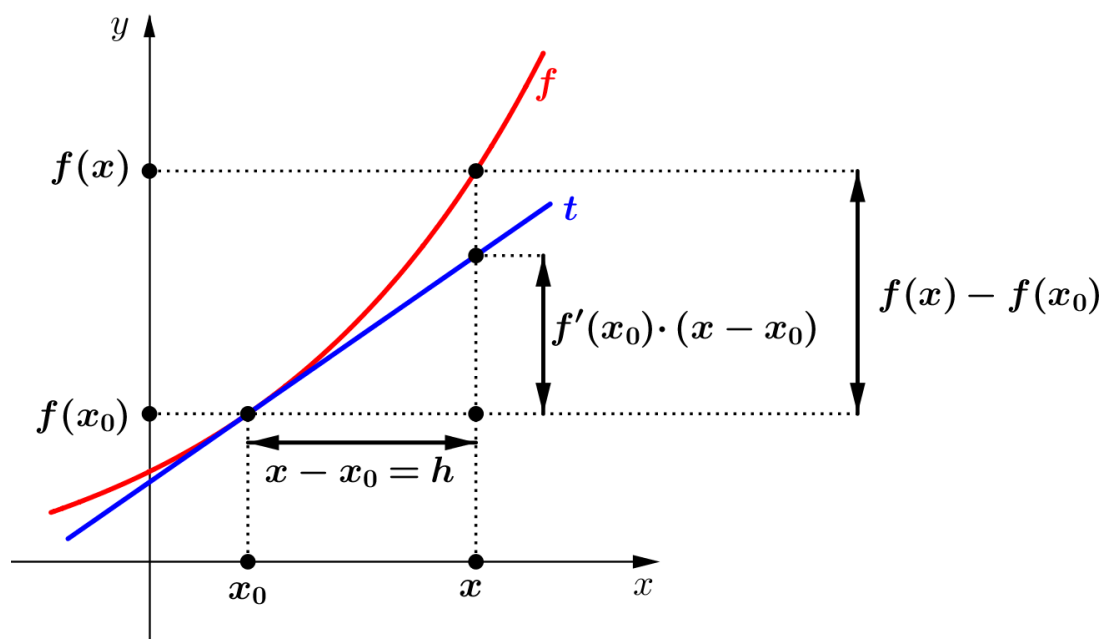
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{P}(x_0, \delta); \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall \mathcal{P}(x_0, \delta)$$

$$\text{tj. } f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\text{přírůstek funkčních hodnot}} \doteq \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{přírůstek funkčních hodnot na tečně}} = f'(x_0) \cdot h$$



Diferenciál funkce - definice

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak výraz

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$$

nazýváme **diferenciálem funkce f v bodě x_0** pro přírůstek h nezávisle proměnné x .

Příklad

Určete $df(4; 0, 1)$ pro $f(x) = \sqrt{x}$.

Příklad

Určete přibližně hodnotu $\sqrt{4, 1}$.

Diferenciály vyšších řádů - definice

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci $f^{(n)}(x_0)$, pak výraz

$$d^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$$

nazýváme **diferenciálem n -tého řádu funkce f v bodě x_0** .

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$$

... diferenciál 1. řádu

$$d^2 f(x_0, h) = f''(x_0) \cdot h^2$$

... diferenciál 2. řádu

$$d^3 f(x_0, h) = f'''(x_0) \cdot h^3$$

... diferenciál 2. řádu

$\vdots$

$$d^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$$

... diferenciál n -tého řádu

Příklad

Určete $d^3f(2; 0, 1)$ pro $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Taylorův polynom

Definice

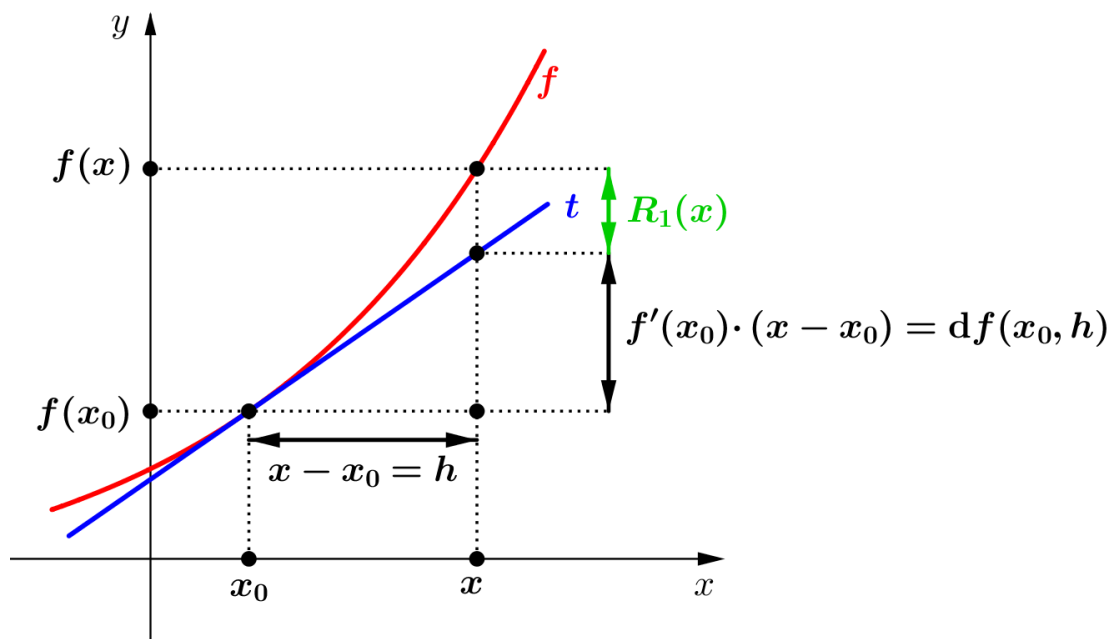
Má-li funkce f v bodě x_0 derivace až do řádu n , pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

kde $x_0, x \in \mathbb{R}$, se nazývá **Taylorův polynom** stupně n funkce f v bodě x_0 .

Je-li $x_0 = 0$ T_n – **Maclaurinův polynom**.

Funkce R_n definovaná vztahem $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ **zbytek** řádu n .



$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$... tečna t – lineární aproximace.

Taylorův polynom - příklady

Příklad

Určete Taylorův polynom 5. stupně funkce $f(x) = (x^2 - x) \ln x$ v bodě $x_0 = 1$.

Příklad

Určete Maclaurinův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \ln e^4 + e^{2x} \sin 3x$.

Příklad

Pomocí Taylorova polynomu 3. stupně přibližně určete $\arctg \frac{1}{3}$.

Věta

Nechť mají funkce f a g v prstencovém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ konečné derivace a necht' platí jedna z podmínek

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty.$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospitalovo pravidlo-příklady

Příklad

■ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x}$

■ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^3}{x^3}$

■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

■ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$

- [1] Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008. ISBN: 978-80-7204-982-0