



FACULTY OF CIVIL institute  
ENGINEERING of mathematics  
and descriptive geometry

# BAA001 Matematika I

## 4. Derivace funkce.

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

## Definice

Je-li funkce  $f$  definovaná v nějakém okolí  $\mathcal{U}(x_0)$  bodu  $x_0 \in \mathbb{R}$  a existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu **derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0$**  a značíme  $f'(x_0)$ .

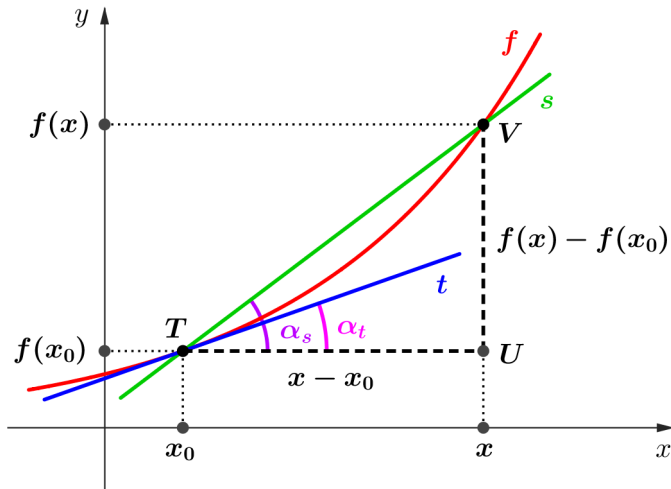
## Definice

Má-li funkce  $f$  derivaci v každém bodě intervalu  $M \subseteq D(f)$ , pak se funkce  $x \mapsto f'(x)$  nazývá **derivací funkce  $f$  na množině  $M$**  a značí se  $f'$ .

## Poznámka

*Platí:*

1. *Funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  nejvýše jednu derivaci.*
2. *Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.  
Pozor, toto tvrzení neplatí obráceně. Např. funkce  $f(x) = |x|$  je spojitá v bodě  $x_0 = 0$ , ale derivaci v tomto bodě nemá.*



$$x \rightarrow x_0$$



sečna  $s \rightarrow$  tečna  $t$

Směrnice sečny:

$$\operatorname{tg} \alpha_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Směrnice tečny:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_t &= \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \alpha_s = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Rovnice **tečny** ke grafu funkce  $f$  v bodě  $T[x_0, f(x_0)]$ :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Rovnice **normály** ke grafu funkce  $f$  v bodě  $T[x_0, f(x_0)]$ :

■  $f'(x_0) \neq 0$ : 
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

■  $f'(x_0) = 0$ : 
$$x = x_0$$

## Pravidla pro derivování

1.  $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$
2.  $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
3.  $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4.  $\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x_0) \neq 0$

# Derivace elementárních funkcí

$$\blacksquare (c)' = 0$$

$$\blacksquare (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\blacksquare (e^x)' = e^x$$

$$\blacksquare (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$\blacksquare (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\blacksquare (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$\blacksquare (\sin x)' = \cos x$$

$$\blacksquare (\cos x)' = -\sin x$$

$$\blacksquare (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\blacksquare (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\blacksquare (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\blacksquare (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\blacksquare (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\blacksquare (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Derivujte funkce:

1.  $f(x) = 2x^7 - \frac{x^2}{3} + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{4x} + \ln 2$

2.  $f(x) = x \cdot \ln x$

3.  $f(x) = \frac{\sin x}{x^5}$



## Věta (O derivaci složené funkce)

*Nechť funkce  $g$  má derivaci v bodě  $x_0$  a funkce  $f$  má derivaci v bodě  $y_0 = g(x_0)$ .  
Pak složená funkce*

$$F(x) = f(g(x))$$

*má derivaci v bodě  $x_0$  a platí, že*

$$F'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

### Poznámka:

Při derivování složené funkce je vhodné začít od vnější složky a pokračovat dovnitř („jako když loupeme cibuli“), tj.

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce  $f$  v bodě  $x_0$ :

- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

Derivujte funkce bez úprav:

- $y = x \cdot e^x \cdot \cos x$

$$[y' = e^x(\cos x + x(\cos x - \sin x))]$$

- $y = \log_{10}(x^2 + 1)$

$$\left[ y' = \frac{2x}{(x^2+1) \cdot \ln 10} \right]$$

Derivujte funkci a výsledek upravte:

- $y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$$\left[ y' = \frac{1}{x^3+1} \right]$$

## Definice

**Derivace  $n$ -tého řádu** v bodě  $x_0$ , pro  $n \geq 2$ :

$$f^{(n)}(x_0) = [f^{(n-1)}]'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

Derivace 1. řádu:  $f'(x)$

Derivace 2. řádu:  $f''(x) = [f'(x)]'$

Derivace 3. řádu:  $f'''(x) = [f''(x)]'$

Derivace 4. řádu:  $f^{(4)}(x) = [f'''(x)]'$

Derivace 5. řádu:  $f^{(5)}(x) = [f^{(4)}(x)]'$

$\vdots$

## Příklad

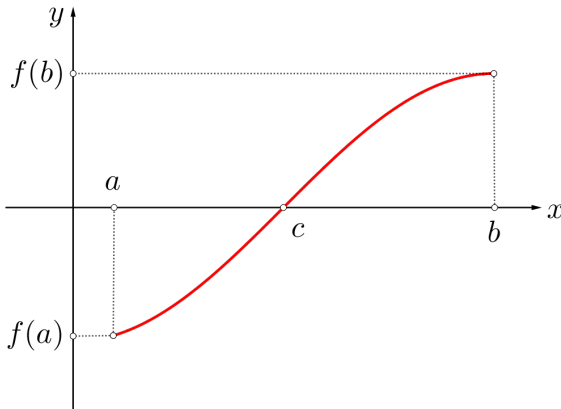
Určete derivaci 4. řádu funkce  $f$ :

a)  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

b)  $f(x) = \sin 2x$

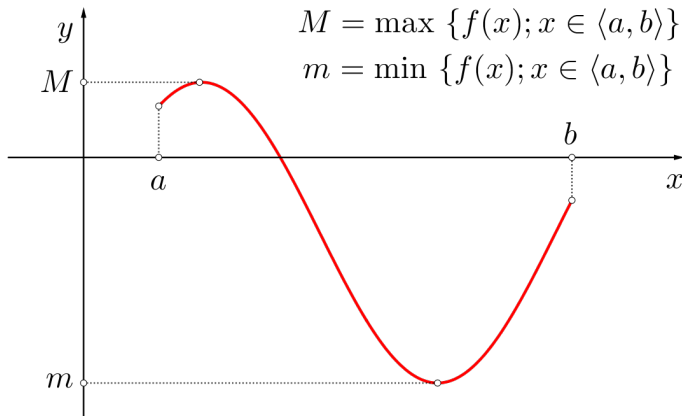
## Věta (Cauchyova věta o nulové hodnotě)

*Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a platí-li  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , pak existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $f(c) = 0$ .*



## Věta (Weierstrassova věta)

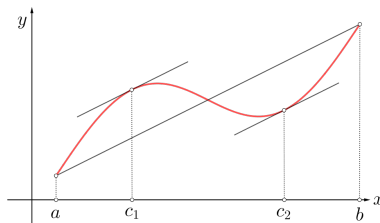
*Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak je  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.*



## Věta (Lagrangeova věta o přírůstku funkce)

*Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má-li derivaci  $f'$  v intervalu  $(a, b)$ , pak existuje  $c \in (a, b)$  tak, že  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ , tj.*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

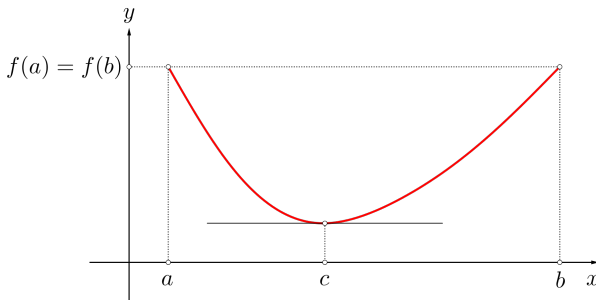


## Poznámka

- Rolleova věta je speciálním typem Lagrangeovy věty pro  $f(a) = f(b)$ .

## Věta (Rolleova věta)

*Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má-li derivaci v intervalu  $(a, b)$ , přičemž  $f(a) = f(b)$ , pak existuje  $c \in (a, b)$  tak, že  $f'(c) = 0$ .*





**DĚKUJI  
ZA  
POZORNOST!**