

BAA001 Matematika I

4. Derivace funkce.

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Brno, 2024

Derivace funkce f v bodě

Definice

Je-li funkce f definovaná v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu **derivací funkce f v bodě x_0** a značíme $f'(x_0)$.

Definice

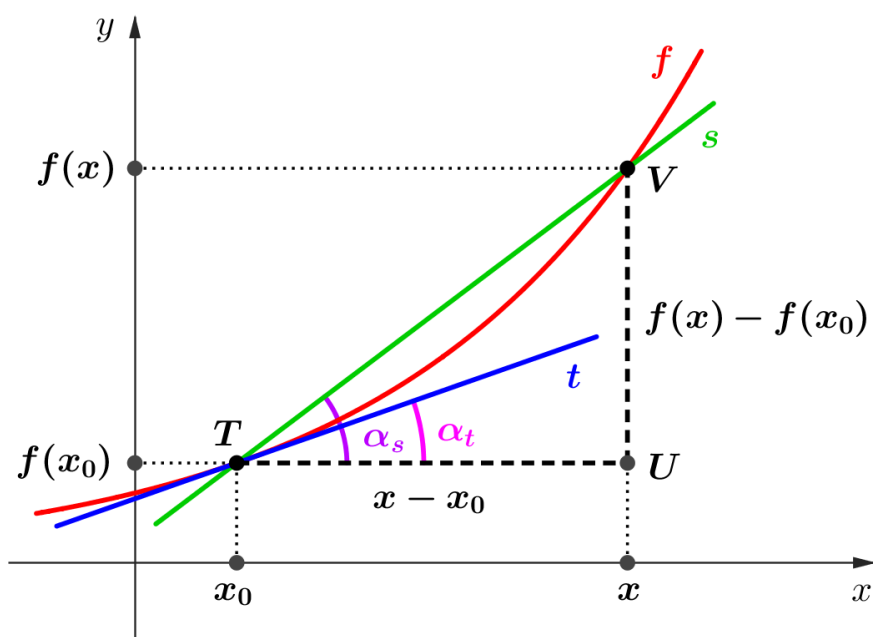
Má-li funkce f derivaci v každém bodě intervalu $M \subseteq D(f)$, pak se funkce $x \mapsto f'(x)$ nazývá **derivací funkce f na množině M** a značí se f' .

Poznámka

Platí:

1. Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
2. Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.
Pozor, toto tvrzení neplatí obráceně. Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$, ale derivaci v tomto bodě nemá.

Geometrický význam derivace



$$x \rightarrow x_0$$



sečna $s \rightarrow$ tečna t

Směrnice sečny:

$$\operatorname{tg} \alpha_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Směrnice tečny:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_t &= \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \alpha_s = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Rovnice **tečny** ke grafu funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Rovnice **normály** ke grafu funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$:

■ $f'(x_0) \neq 0$:
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

■ $f'(x_0) = 0$:
$$x = x_0$$

Pravidla pro derivování

1. $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$
2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x_0) \neq 0$

Derivace elementárních funkcí

$$\blacksquare (c)' = 0$$

$$\blacksquare (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\blacksquare (e^x)' = e^x$$

$$\blacksquare (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$\blacksquare (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\blacksquare (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$\blacksquare (\sin x)' = \cos x$$

$$\blacksquare (\cos x)' = -\sin x$$

$$\blacksquare (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\blacksquare (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\blacksquare (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\blacksquare (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\blacksquare (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\blacksquare (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Příklady

Derivujte funkce:

1. $f(x) = 2x^7 - \frac{x^2}{3} + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{4x} + \ln 2$

2. $f(x) = x \cdot \ln x$

3. $f(x) = \frac{\sin x}{x^5}$

Věta (O derivaci složené funkce)

Nechť funkce g má derivaci v bodě x_0 a funkce f má derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$.
Pak složená funkce

$$F(x) = f(g(x))$$

má derivaci v bodě x_0 a platí, že

$$F'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Poznámka:

Při derivování složené funkce je vhodné začít od vnější složky a pokračovat dovnitř („jako když loupeme cibuli“), tj.

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Příklady

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě x_0 :

■ $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$

Derivujte funkce bez úprav:

■ $y = x \cdot e^x \cdot \cos x$

$$[y' = e^x(\cos x + x(\cos x - \sin x))]$$

■ $y = \log_{10}(x^2 + 1)$

$$\left[y' = \frac{2x}{(x^2+1) \cdot \ln 10} \right]$$

Derivujte funkci a výsledek upravte:

■ $y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$$\left[y' = \frac{1}{x^3+1} \right]$$

Definice

Derivace n -tého řádu v bodě x_0 , pro $n \geq 2$:

$$f^{(n)}(x_0) = [f^{(n-1)}]'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

Derivace 1. řádu: $f'(x)$

Derivace 2. řádu: $f''(x) = [f'(x)]'$

Derivace 3. řádu: $f'''(x) = [f''(x)]'$

Derivace 4. řádu: $f^{(4)}(x) = [f'''(x)]'$

Derivace 5. řádu: $f^{(5)}(x) = [f^{(4)}(x)]'$

⋮

Derivace vyšších řádů - příklady

Příklad

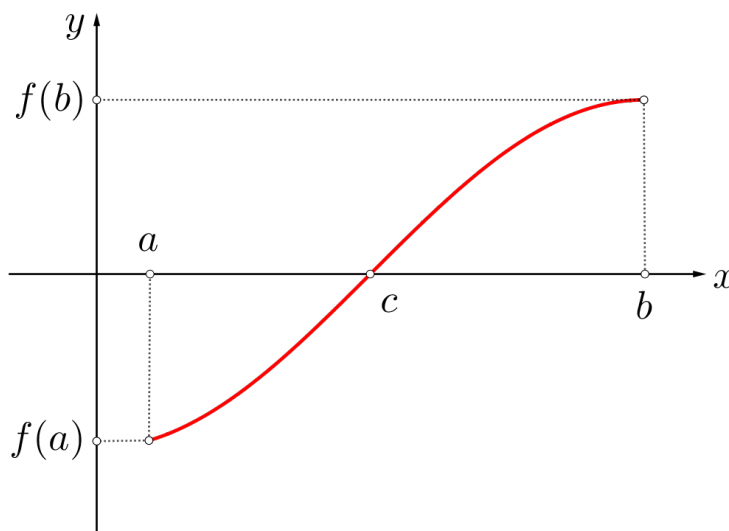
Určete derivaci 4. řádu funkce f :

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

b) $f(x) = \sin 2x$

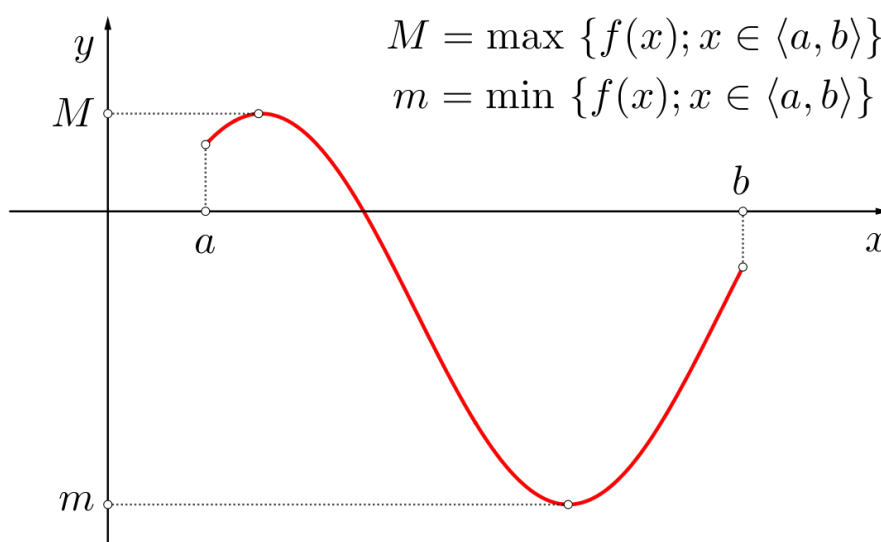
Věta (Cauchyova věta o nulové hodnotě)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.



Věta (Weierstrassova věta)

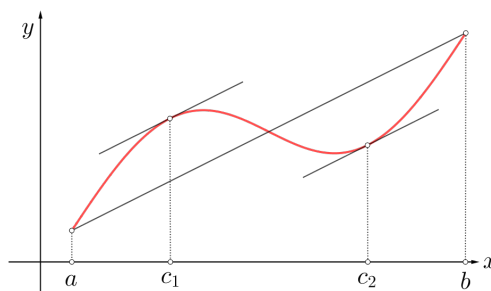
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je f na intervalu $\langle a, b \rangle$ ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.



Věta (Lagrangeova věta o přírůstku funkce)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li derivaci f' v intervalu (a, b) , pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, tj.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Poznámka

- Rolleova věta je speciálním typem Lagrangeovy věty pro $f(a) = f(b)$.

Věta (Rolleova věta)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li derivaci v intervalu (a, b) , přičemž $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

