



BAA001 Matematika I

3. Racionální funkce. Limita funkce.

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Racionální funkce



Definice

Racionální funkcí $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$ nazýváme podíl dvou nenulových polynomů P_m , Q_n stupňů m , n .

- $m < n$... **ryzí racionální funkce**
- $m \geq n$... **neryzí racionální funkce**

Věta

Každá neryzí racionální funkce f je buď polynom nebo ji lze vyjádřit (pomocí dělení polynomů) jako součet polynomu a ryzí racionální funkce.

Věta

Na změnu znaménka racionální funkce $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$, kde polynomy P_m, Q_n nemají společné kořeny, mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti čitatele a jmenovatele.

Příklad

Určete znaménko funkce $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)(x+3)}{(x-1)^2(x+3)(2x^2+1)(4-x)}$.

Rozklad na parciální zlomky

Věta

Každou ryzí racionální funkci $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$ lze rozložit na součet parciálních zlomků.

- Je-li v rozkladu Q_n na součin $(cx + d)^k$, $c \neq 0$, pak v rozkladu $f(x)$ je součet k parciálních zlomků:

$$f(x) = \frac{C_1}{cx + d} + \frac{C_2}{(cx + d)^2} + \dots + \frac{C_k}{(cx + d)^k}$$

- Je-li v rozkladu Q_n na součin $(ax^2 + bx + c)^l$, $a \neq 0$, $D < 0$, pak v rozkladu $f(x)$ je součet l parciálních zlomků:

$$f(x) = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_lx + B_l}{(ax^2 + bx + c)^l}$$

Příklad

Napište obecný tvar rozkladu racionální funkce $f(x)$ na parciální zlomky:

$$\blacksquare f(x) = \frac{12x + 15}{(x + 1)(x - 3)^3(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^2}$$

Rozklad na parciální zlomky - příklady

Příklad

Rozložte funkci $f(x)$ na parciální zlomky.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 6}$$

Příklad

Určete znaménko funkce $f(x)$ a rozložte ji na parciální zlomky, resp. na součet polynomu s parciálními zlomky.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^4 + 3x^2}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

Definice

Rozšířenou množinou reálných čísel $\mathbb{R}^*$ rozumíme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšířenou o body ∞ a $-\infty$, tj.

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme **nevlastní čísla**, zatímco body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **vlastní čísla**.

Definované operace s nekonečnem

Pro reálná čísla $k \in \mathbb{R}$ a nevlastní čísla ∞ a $-\infty$:

- $\infty + \infty = \infty, -\infty - \infty = -\infty$
- $k \pm \infty = \pm\infty + k = \pm\infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty, \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty,$
 $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty, -(-\infty) = \infty$
- $k \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot k = \pm\infty$ pro $k > 0$
 $k \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot k = \mp\infty$ pro $k < 0$
- $\frac{k}{\pm\infty} = 0$
- $k^\infty = 0$ pro $0 < k < 1$
 $k^\infty = \infty$ pro $k > 1$
 $\infty^\infty = \infty$

- $\infty - \infty, -\infty + \infty$
- $0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty)$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\pm\infty}{\mp\infty}$
- $\frac{k}{0}, \frac{\pm\infty}{0}$
- $(\pm\infty)^0, 0^0$
- $1^\infty, k^\infty$ pro $k < 0$

Neurčité výrazy a výrazy obsahující prvky ∞ a $-\infty$ budeme zapisovat do $[]$.

Okolí bodu

Pro $x_0 \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ definujeme

- **okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

- **pravé okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{U}^+(x_0, \delta) = \langle x_0, x_0 + \delta \rangle,$$

- **levé okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{U}^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 \rangle.$$

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ definujeme

- **prstencové okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{P}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\},$$

- **pravé prstencové okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{P}^+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta),$$

- **levé prstencové okolí bodu x_0** jako

$$\mathcal{P}^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0).$$

Pro $\pm\infty$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ definujeme

- **(prstencové) okolí bodu ∞** jako

$$\mathcal{U}(\infty, \delta) = \mathcal{P}(\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, \infty),$$

- **(prstencové) okolí bodu $-\infty$** jako

$$\mathcal{U}(-\infty, \delta) = \mathcal{P}(-\infty, \delta) = (-\infty, -\frac{1}{\delta}).$$

Definice (Cauchyho definice limity)

Funkce $f : y = f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ **limitu** rovnou číslu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ je funkce f definována a platí $f(x) \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$.

Píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+; \forall x \in \mathcal{P}(x_0, \delta) : x \in D(f) \wedge f(x) \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

Věta

Každá funkce má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^$ nejvýše jednu limitu.*

Možné případy pro hodnotu limity L :

- 1) **vlastní limita ve vlastním bodě** $\iff x_0 \in \mathbb{R}$ a $L \in \mathbb{R}$
- 2) **nevlastní limita ve vlastním bodě** $\iff x_0 \in \mathbb{R}$ a $L = \pm\infty$
- 3) **vlastní limita v nevlastním bodě** $\iff x_0 = \pm\infty$ a $L \in \mathbb{R}$
- 4) **nevlastní limita v nevlastním bodě** $\iff x_0 = \pm\infty$ a $L = \pm\infty$

Poznámka

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$, zaměníme-li v definici limity $\mathcal{P}(x_0)$ za $\mathcal{P}^+(x_0)$, resp. $\mathcal{P}^-(x_0)$ dostaneme definici **limity zprava**, resp. **limity zleva** (jednostranné limity).

Píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$, resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Věta

Pro $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$ platí:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \nexists$$

Příklady

Příklad

Z grafu funkce určete limity.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x =$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x =$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x =$

Příklad

Z grafu funkce určete limity.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x =$
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x =$
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x =$
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x =$

Definice (Spojitost v bodě)

Funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže je definovaná v nějakém okolí tohoto bodu a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Funkce f je **spojitá zprava v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, resp. **spojitá zleva v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

- a) f je definovaná v pravém okolí $\mathcal{U}^+(x_0)$, resp. v levém okolí $\mathcal{U}^-(x_0)$,
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Definice (Spojitost na intervalu)

Funkce f je **spojitá na otevřeném intervalu** $(a, b) \subseteq D(f)$, je-li spojitá v každém $x \in (a, b)$.

Funkce f je **spojitá na uzavřeném intervalu** $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$, je-li spojitá na intervalu (a, b) a současně je spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b .

Je-li funkce f spojitá v bodě x_0 , pak má v tomto bodě limitu rovnu funkční hodnotě $f(x_0)$.

Věta

Je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$, přičemž $L_1, L_2, x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak platí:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ pro $L_2 \neq 0$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L_1|$.

Věta (Limita složené funkce)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right)$$

Věta

Je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)$ platí

- $f(x) > 0$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$,
- $f(x) < 0$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Příklad

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2}$