



BAA001 Matematika I

Vektorový prostor, báze, dimenze, souřadnice vektoru

Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Lineární prostor



Definice

Množina $M = \{x, y, z, \dots\}$ se nazývá **reálný lineární prostor**, když pro každé $x, y \in M, \alpha \in \mathbb{R}$

$$x, y \in M \rightarrow x + y \in M$$

(na M je definováno sčítání prvků),

$$\alpha \in \mathbb{R}, x \in M \rightarrow \alpha x \in M$$

(na M je definováno násobení skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$),

a tyto dvě operace splňují:

Definice (pokračování)

1. $x + y = y + x$,
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
3. existuje nulový prvek $o \in M$ takový, že $x + o = x$,
4. ke každému prvku x existuje opačný prvek $-x$ tak, že platí $x + (-x) = o$,
5. $1 \cdot x = x$,
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Poznámka:

Prvky $x, y, z, \dots$ nazýváme **vektory** a značíme $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$.

Lineární kombinace vektorů

Definice

Jsou-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ vektory a $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, pak vektor

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n$$

nazveme **lineární kombinací** vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

Definice

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ nazveme **lineárně nezávislé**, když

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n = \vec{o} \iff c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

V opačném případě (tj. alespoň jedno $c_i \neq 0$) jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ **lineárně závislé**.

Definice

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$... **báze** lineárního prostoru M :

$$\vec{x} \in M \rightarrow \vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + \dots + c_n \vec{x}_n \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}).$$

Počet n vektorů báze ... **dimenze** lineárního prostoru M .

Koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$... **souřadnice vektoru** $\vec{x}$ v uspořádané bázi $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$.

Eukleidovský prostor $\mathbb{E}_3$

Eukleidovským prostorem $\mathbb{E}_3$ budeme rozumět bodový prostor, v němž

- každému bodu $A \in \mathbb{E}_3$ je jednoznačně přiřazena uspořádaná trojice $[a_1, a_2, a_3]$ reálných čísel, které nazýváme souřadnicemi bodu A a píšeme $A = [a_1, a_2, a_3]$,
- každým dvěma bodům $A, B \in \mathbb{E}_3$, kde $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, je přiřazena eukleidovská vzdálenost $\rho(A, B)$ bodů A, B , pro kterou platí

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (a_i - b_i)^2}.$$

- Každé uspořádané dvojici bodů (A, B) přiřadíme orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B a budeme ji nazývat **umístěním vektoru** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- **Vektorem** $\vec{u}$ budeme rozumět množinu orientovaných úseček, které mají stejný směr a velikost.
- Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ patří do jedné třídy, jestliže úsečky $(A, D), (B, C)$ mají též střed.

7.2 Eukleidovský prostor $\mathbb{E}_3$

Eukleidovský prostor $\mathbb{E}_3$

- Vektor: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$
- Bod: $A = [a_1, a_2, a_3]$
- Kartézský souřadnicový systém $\langle O, x, y, z \rangle$
$$\left. \begin{array}{l} \vec{i} = (1, 0, 0) \\ \vec{j} = (0, 1, 0) \\ \vec{k} = (0, 0, 1) \end{array} \right\} \text{jednotkové vektory na osách} - \text{ báze } \mathbb{E}_3$$

- Vektor určený dvěma různými body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

- Je-li $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, pak vektor $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ (změněná orientace) se nazývá **opačný vektor** k vektoru $\vec{u}$.
- **Úhlem nenulových vektorů** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ se nazývá úhel φ polopřímek AB , AC měřený v mezích $0 \leq \varphi \leq \pi$.
- Nulový vektor: $\vec{o} = \overrightarrow{AA} = (0, 0, 0)$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

- Součet vektorů:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

- Součin vektoru s číslem $k \in \mathbb{R}$:

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, k \cdot u_3)$$

Definice

Dva nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ nazýváme **kolineární vektory**, jsou-li lineárně závislé.

- Existují takové umístění, že leží na jedné přímce.
- Existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že $\vec{u} = k\vec{v}$.
- Nulový vektor považujeme za kolineární s každým vektorem.

Dva nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ nazýváme **nekolineární vektory**, jsou-li lineárně nezávislé.

Definice

Tři nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nazýváme **komplanární vektory**, jsou-li lineárně závislé.

- Existují takové umístění, že leží v jedné rovině.
- Existuje právě jedna dvojice čísel $k, \ell \in \mathbb{R}$ taková, že $\vec{u} = k\vec{v} + \ell\vec{w}$.
- Pokud je některý z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nulovým vektorem, pak tuto trojici vektorů považujeme také za komplanární.

Tři nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nazýváme **nekomplanární vektory**, jsou-li lineárně nezávislé.

Nechť A je čtvercová matice řádu n a E je jednotková matice řádu n .
Homogenní soustava lineárních rovnic

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$

má netriviální řešení právě tehdy, když

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Determinant $|A - \lambda E|$ nazýváme **charakteristický polynom** matice A .

Kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ charakteristického polynomu nazýváme **vlastní čísla** matice A .

Vlastní vektor $\vec{x}_i$ příslušný k vlastnímu číslu λ_i je řešením soustavy

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0},$$

kde za λ dosadíme kořen λ_i charakteristického polynomu.

Je-li $\vec{x}$ vlastním vektorem matice A , pak každý konstantní násobek $k\vec{x}$, $k \neq 0$ (obecně $k \in \mathbb{C}$) je opět vlastním vektorem matice A .

Příklad

Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Příklad

Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Základní literatura

- [1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6
- [2] Chrastinová, Veronika: *Matematika I, Modul 3, Vektorová algebra a analytická geometrie*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, Brno 2004.
- [3] Horňáková, Dagmar: *Matematika I₅, Vektorová algebra*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, vydal ECON publishing, s.r.o., Brno 2001. ISBN: 80-902268-9-2