

1. REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

Funkce a její graf. Základní vlastnosti funkcí.

Elementární funkce.

Složená a inverzní funkce.

Cyklometrické funkce.

Parametrické zadání funkce

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Funkce a její graf

Definice

Řekneme, že **funkčním předpisem** $y = f(x)$ je určena **reálná funkce f jedné reálné proměnné x** , jestliže

- a) je dán obor $A \subset \mathbb{E}_1$ „přípustných“ reálných hodnot nezávisle proměnné x ;
- b) každému $x \in A$ je přiřazena **právě jedna** reálná hodnota závisle proměnné y podle funkčního předpisu $y = f(x)$.

$y = f(x)$... **explicitní zadání**

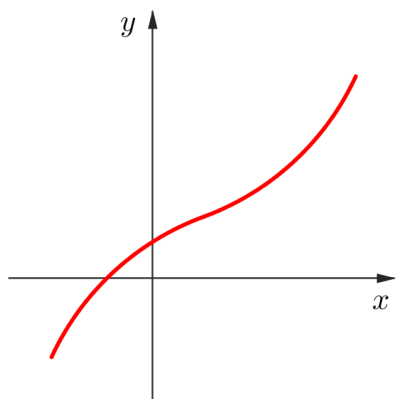
$A = D(f)$... **definiční obor**

Pokud není definiční obor zadán, bereme **přirozený definiční obor** = množina všech reálných čísel, pro které má funkční předpis $y = f(x)$ smysl.

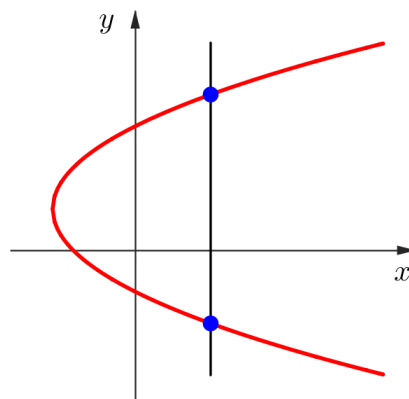
$f(A) = H(f)$... **obor funkčních hodnot**

Graf funkce

- Znázornění funkce
- $\text{Gr } f = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \in D(f), y = f(x)\}$
- Každá rovnoběžka s osou y protne graf funkce nejvýše v jednom bodě.



je graf funkce

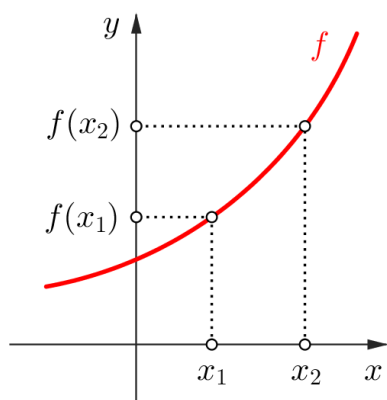


není graf funkce

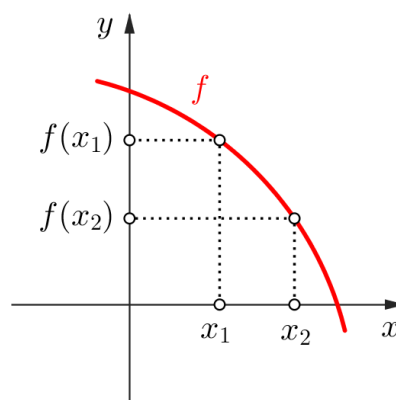
Základní vlastnosti funkcí

Funkce f je na množině $M \subseteq D(f)$

- **rostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **klesající** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Rostoucí funkce

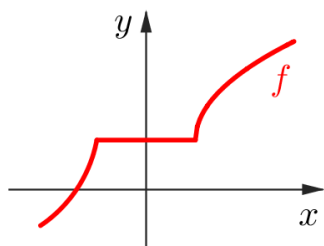


Klesající funkce

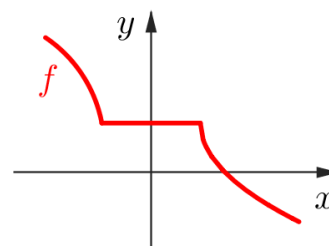
- **ryze monotónní**, je-li rostoucí nebo klesající

Základní vlastnosti funkcí

- **neklesající** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **nerostoucí** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



Neklesající funkce

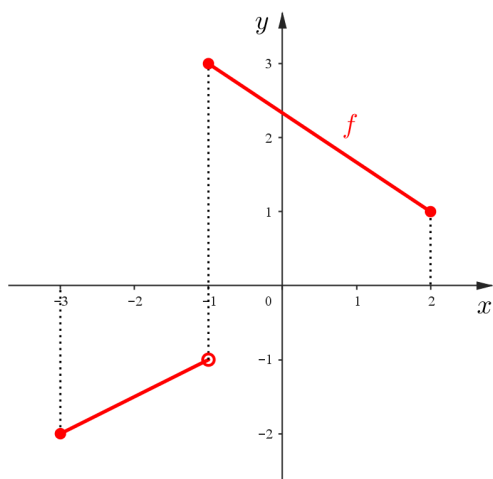


Nerostoucí funkce

- **monotónní**, je-li neklesající nebo nerostoucí

Základní vlastnosti funkcí

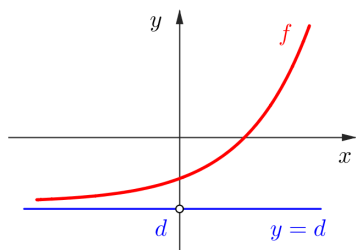
- **prostá** – $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
 - Každá rovnoběžka s osou x protne graf prosté funkce nejvýše v jednom bodě.
 - f je ryze monotónní $\Rightarrow f$ je prostá.
 - Opak (f je prostá $\Rightarrow f$ je ryze monotónní) **neplatí**.



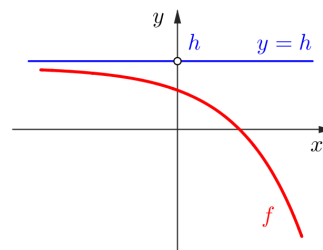
f je na $\langle -3, 2 \rangle$ prostá, ale není na $\langle -3, 2 \rangle$ ryze monotónní.

Základní vlastnosti funkcí

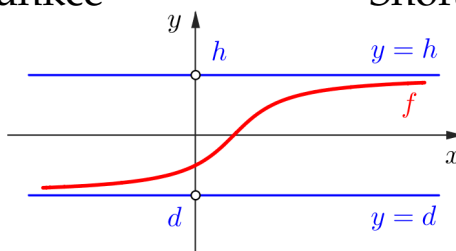
- **zdola ohraničená** – $\exists d \in \mathbb{R}; f(x) \geq d \quad \forall x \in M$
- **shora ohraničená** – $\exists h \in \mathbb{R}; f(x) \leq h \quad \forall x \in M$
- **ohraničená** – $\exists d, h \in \mathbb{R}; d \leq f(x) \leq h \quad \forall x \in M$



Zdola ohraničená funkce



Shora ohraničená funkce

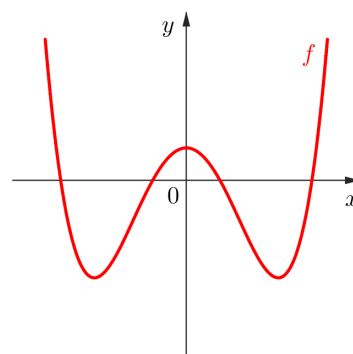


Ohraničená funkce

Základní vlastnosti funkcí

■ Sudá

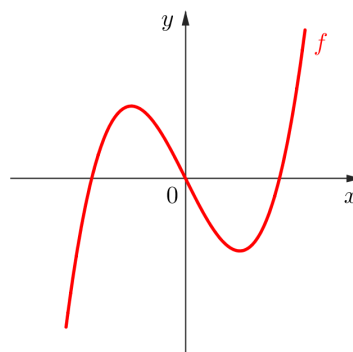
1. $x \in M \Rightarrow -x \in M$
 2. $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in M$
- graf je symetrický vzhledem k ose y



Sudá
funkce

■ Lichá

1. $x \in M \Rightarrow -x \in M$
 2. $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in M$
- graf je symetrický vzhledem k počátku



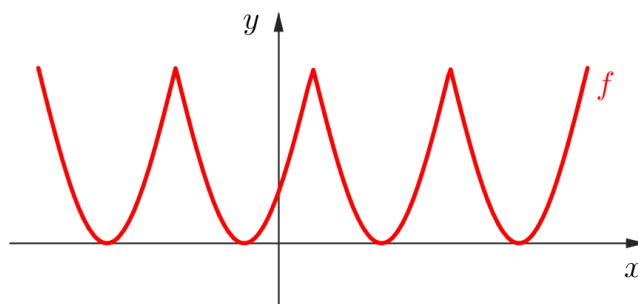
Lichá
funkce

Základní vlastnosti funkcí

■ Periodická

$\exists p \in \mathbb{R}^+ :$

1. $x \in M \Rightarrow x + p \in M$
 2. $f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in M$
- $p \dots$ **perioda**

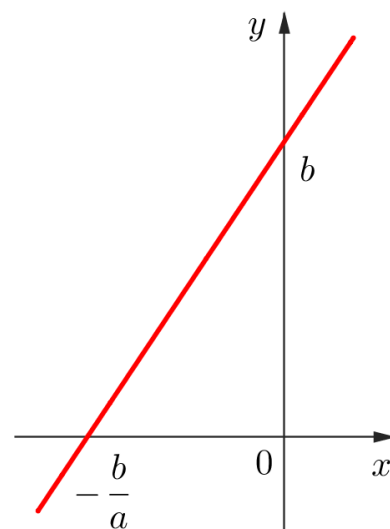


Periodická funkce

Elementární funkce

Lineární funkce $y = ax + b$

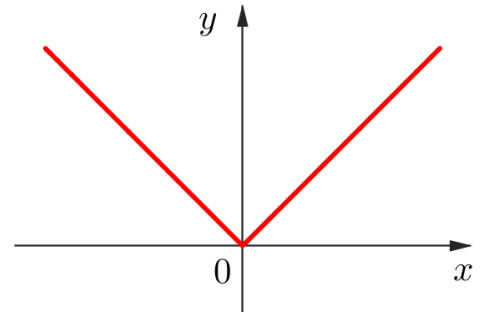
- $a, b \in \mathbb{R}$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: přímka
- $a = 0$: **Konstantní funkce** $y = b$
- $b = 0$: **Přímá úměrnost** $y = ax$



Elementární funkce

Absolutní hodnota $y = |x|$

■ $D(f) = \mathbb{R}$



T FA

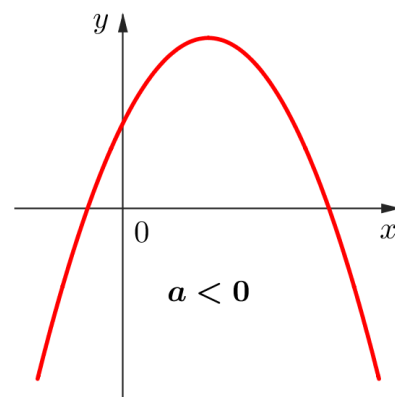
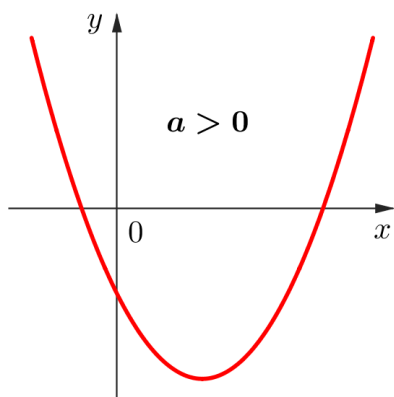
Poznámka:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

Elementární funkce

Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$

- $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
- $D(f) = \mathbb{R}$
- graf: parabola



Elementární funkce

Lineární lomená funkce $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

■ $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0, ad - bc \neq 0$

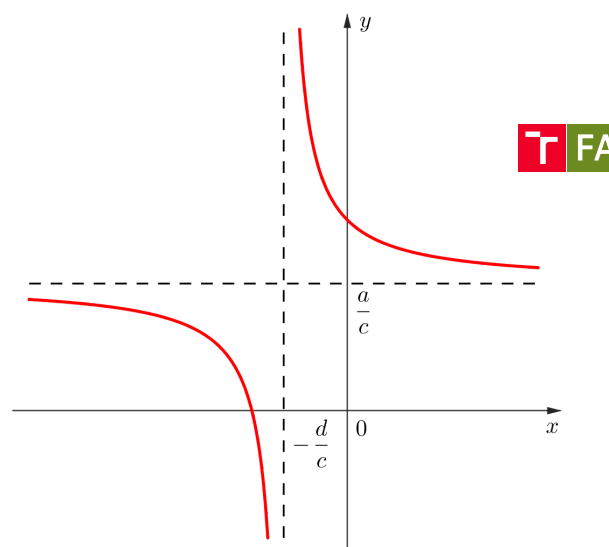
■ $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

■ graf: rovnoosá hyperbola

■ zvláštní případ:

Nepřímá úměrnost $y = \frac{k}{x}$

$k \in \mathbb{R} - \{0\}$



Elementární funkce

Mocninná funkce $y = x^n$

■ $n \in \mathbb{N}$

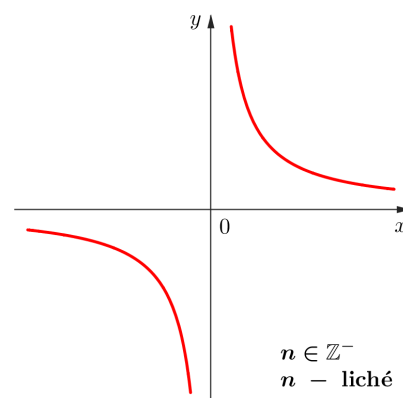
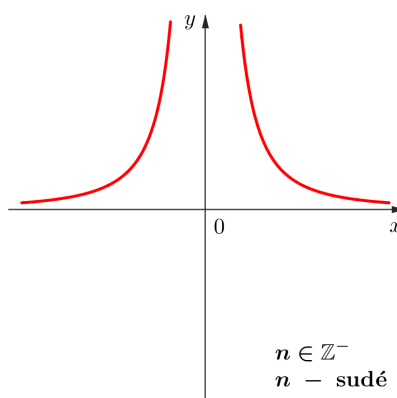
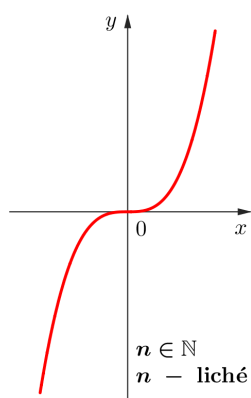
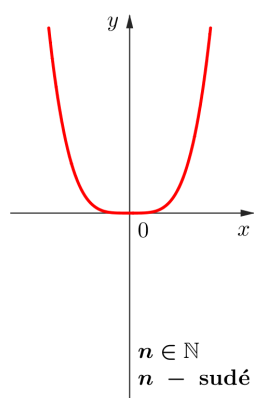
■ $D(f) = \mathbb{R}$

■ graf: parabola n -tého stupně

■ $n \in \mathbb{Z}^-$

■ $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

■ graf: hyperbola n -tého stupně

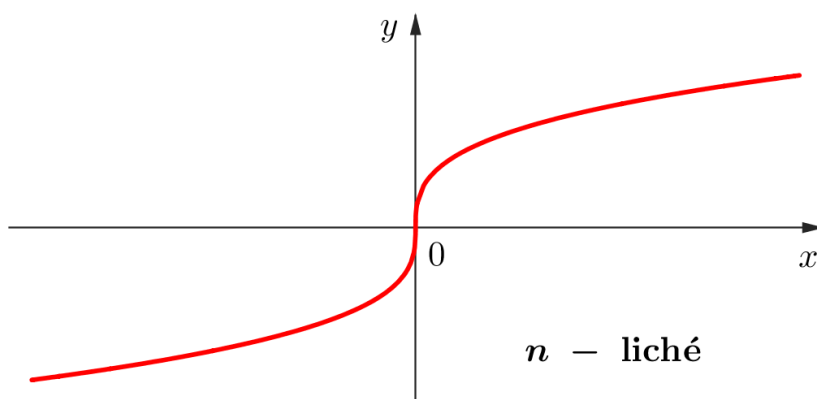
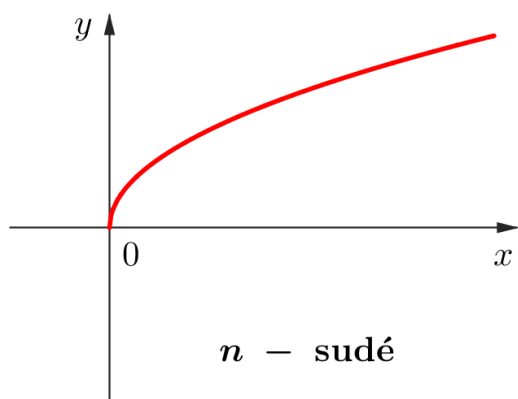


Elementární funkce

n -tá odmocnina $y = \sqrt[n]{x}$

- $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
- graf: parabola n -tého stupně
- n sudé ... $D(f) = \mathbb{R}_0^+$
- n liché ... $D(f) = \mathbb{R}$

T FA



Inverzní funkce

Definice

Je-li f **prostá** funkce v $D(f)$, pak k ní existuje **inverzní funkce** f^{-1} definovaná na $H(f)$, přičemž platí

$$[x, y] \in \text{Gr } f \iff [y, x] \in \text{Gr } f^{-1}$$

Platí

- $D(f^{-1}) = H(f), H(f^{-1}) = D(f)$
- $f(f^{-1}(x)) = x, x \in D(f^{-1})$ a $f^{-1}(f(x)) = x, x \in D(f)$
- $(f^{-1})^{-1} = f$

Platí

- Je-li funkce f rostoucí/klesající, pak je také f^{-1} rostoucí/klesající.
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle osy I. a III. kvadrantu (tj. přímky $y = x$).

Inverzní funkce

Poznámka: Potřebujeme-li najít inverzní funkci k funkci f , která není prostá na celém $D(f)$, je třeba nejprve funkci f omezit na interval, na němž je prostá.

$$f : y = x^2 - 2, D(f) = \mathbb{R}$$

není prostá

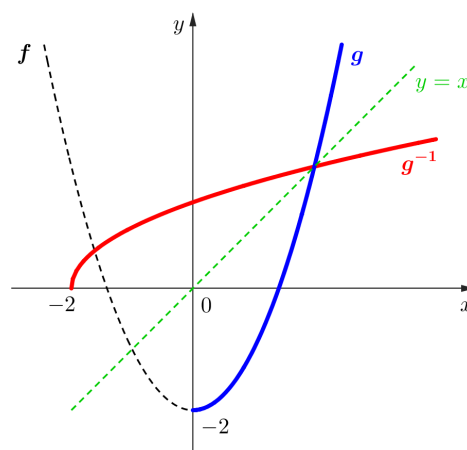
↓

$$g : y = x^2 - 2, D(g) = \langle 0, \infty \rangle$$

je prostá

↓

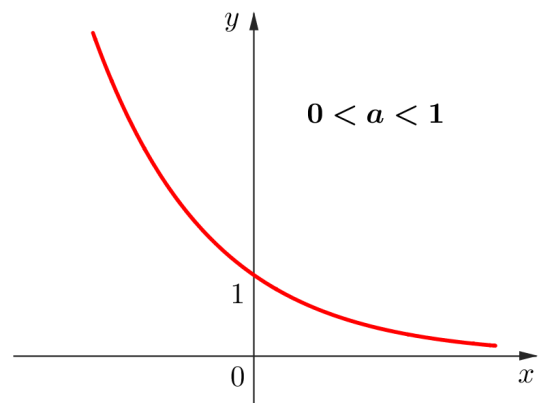
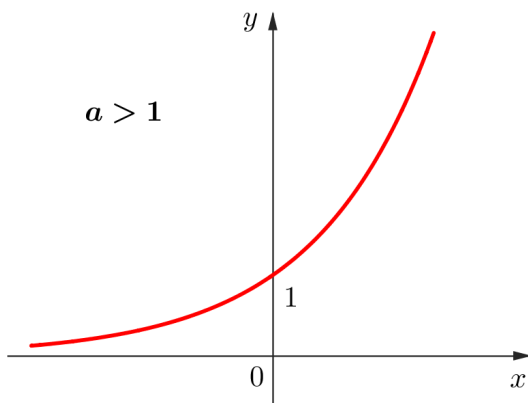
$$g^{-1} : y = \sqrt{x + 2}, D(g^{-1}) = \langle -2, \infty \rangle$$



Elementární funkce → Exponenciální funkce

Exponenciální funkce $y = a^x$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}^+$



Elementární funkce → Exponenciální funkce

$\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R} :$

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$$

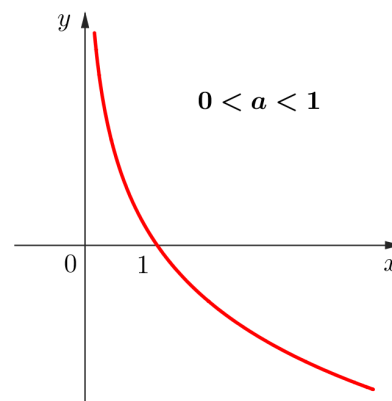
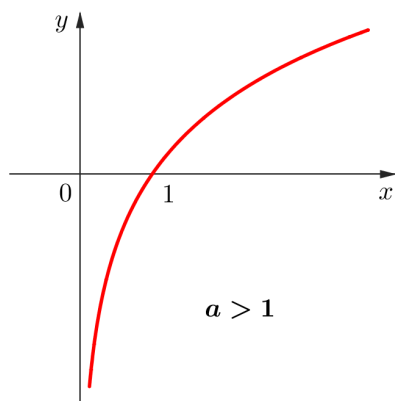
$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

Elementární funkce → Logaritmická funkce

Logaritmická funkce $y = \log_a x \quad \dots \quad a^y = x$

- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $D(f) = \mathbb{R}^+, H(f) = \mathbb{R}$
- **Přirozený logaritmus:** $y = \ln x = \log_e x$, $e \doteq 2,71$
- **Dekadický logaritmus:** $y = \log x = \log_{10} x$

T FA



Elementární funkce → Logaritmická funkce

$\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R} :$

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

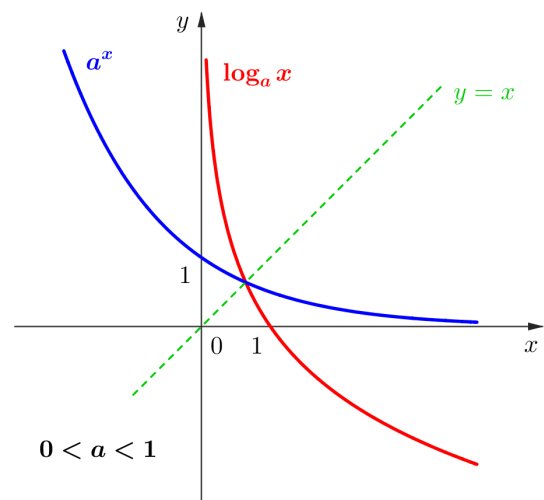
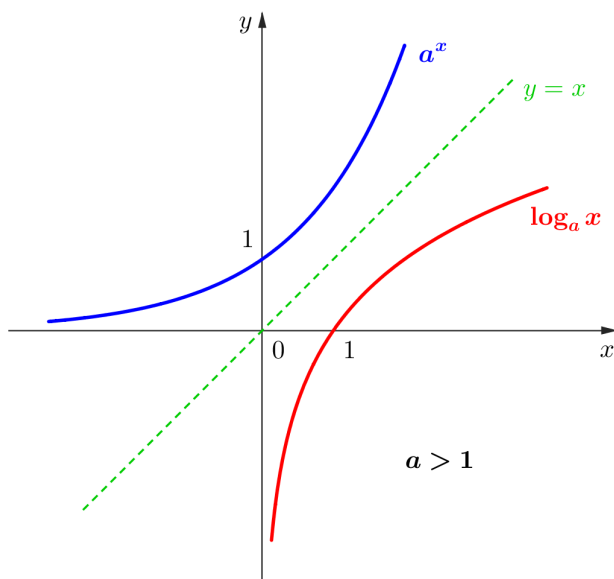
$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Inverzní funkce



$$a^{\log_a x} = x$$
$$\log_a a^x = x$$

Inverzní funkce

Výpočet inverzní funkce f^{-1} z funkce f :

1. V zápisu funkce $y = f(x)$ zaměníme x a y , čímž dostaneme $x = f(y)$.
2. Z rovnice $x = f(y)$ vyjádříme y a máme předpis $y = f^{-1}(x)$.

Příklad

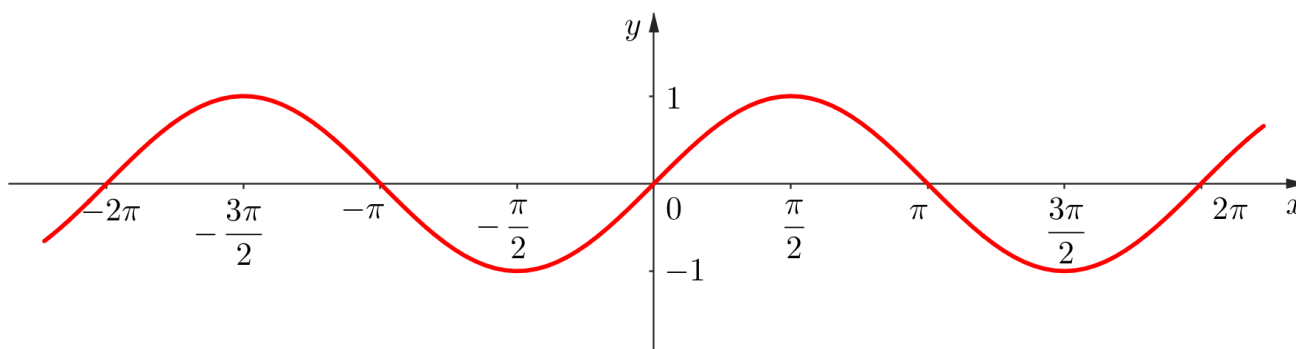
Určete inverzní funkci f^{-1} k funkci f a definiční obor funkcí f a f^{-1} .

■ $f : y = e^{2x-1}$

Elementární funkce → Goniometrické funkce

Sinus $y = \sin x$

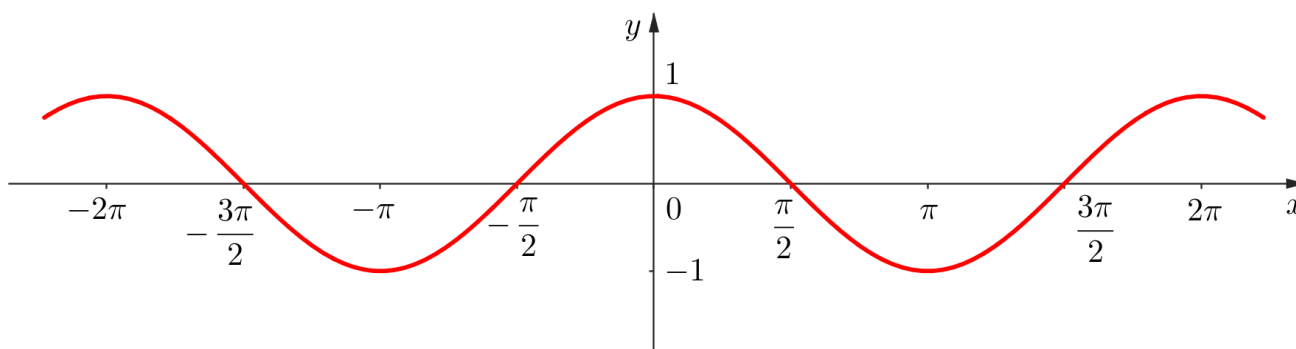
- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- lichá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou 2π



Elementární funkce → Goniometrické funkce

Kosinus $y = \cos x$

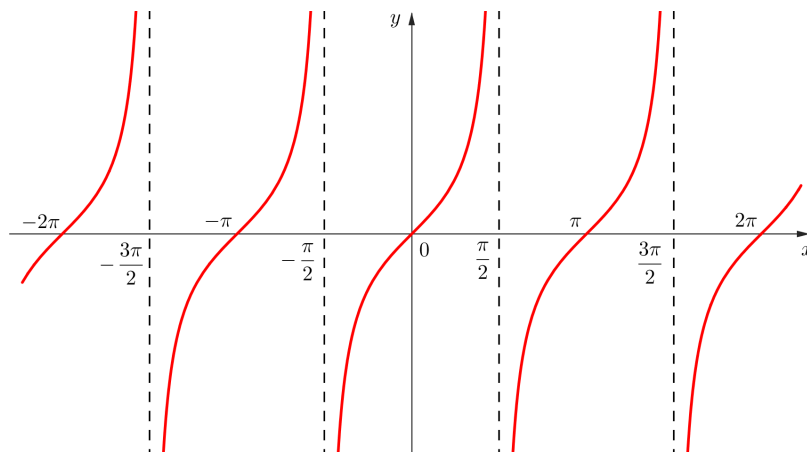
- $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- sudá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou 2π



Elementární funkce → Goniometrické funkce

Tangens $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

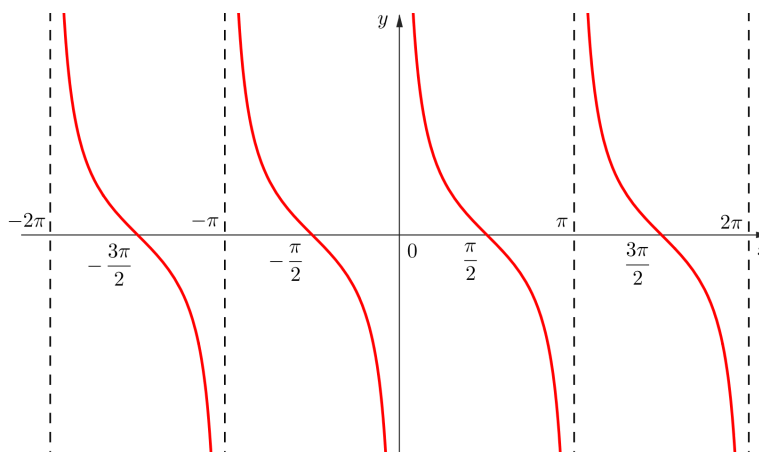
- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}, H(f) = \mathbb{R}$
- lichá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou π



Elementární funkce → Goniometrické funkce

Kotangens $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}, H(f) = \mathbb{R}$
- lichá
- periodická na $\mathbb{R}$ s periodou π



Elementární funkce → Goniometrické funkce

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/
$\operatorname{cotg} x$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0



Elementární funkce → Goniometrické funkce

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

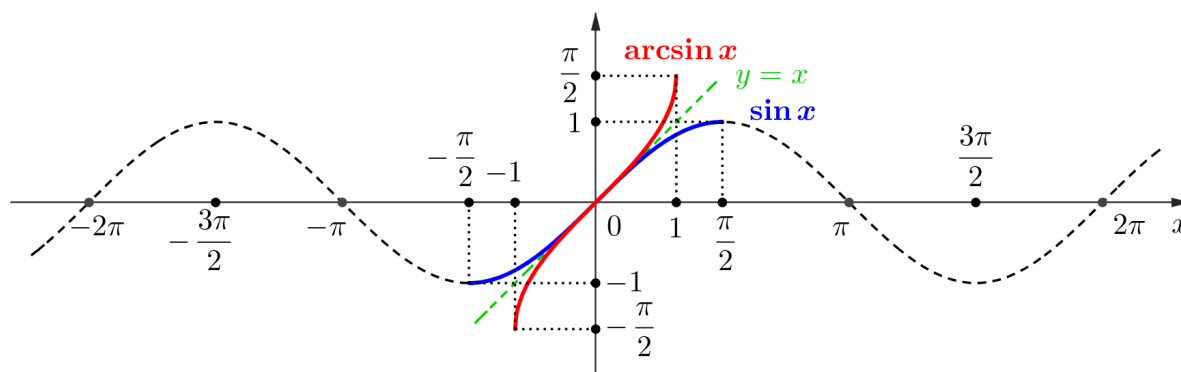
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Cyklometrické funkce

– funkce inverzní ke goniometrickým funkcím

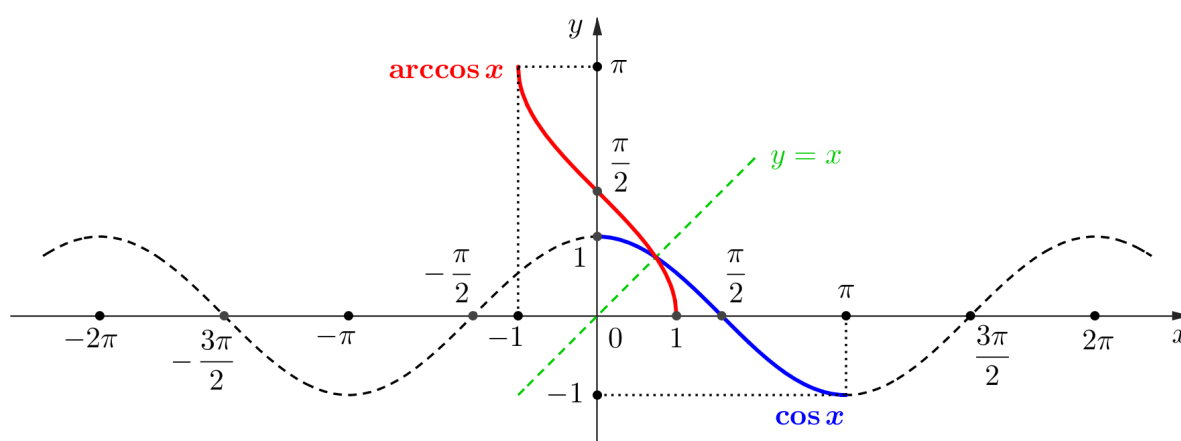
Arkussinus $y = \arcsin x$

■ $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$



Arkuskosinus $y = \arccos x$

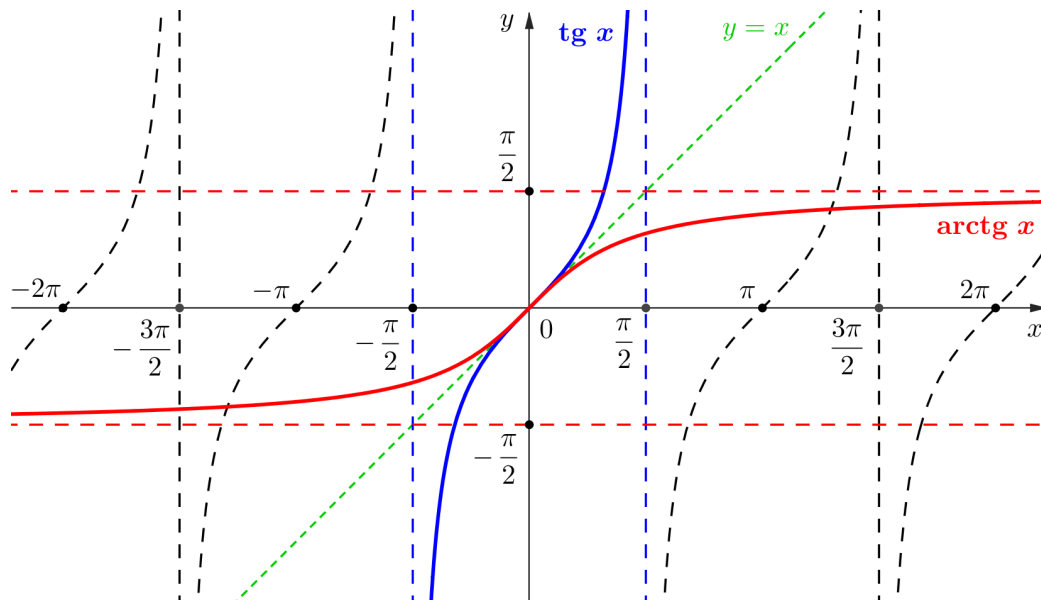
■ $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(f) = \langle 0, \pi \rangle$



Inverzní funkce → Cyklometrické funkce

Arkustangens $y = \operatorname{arctg} x$

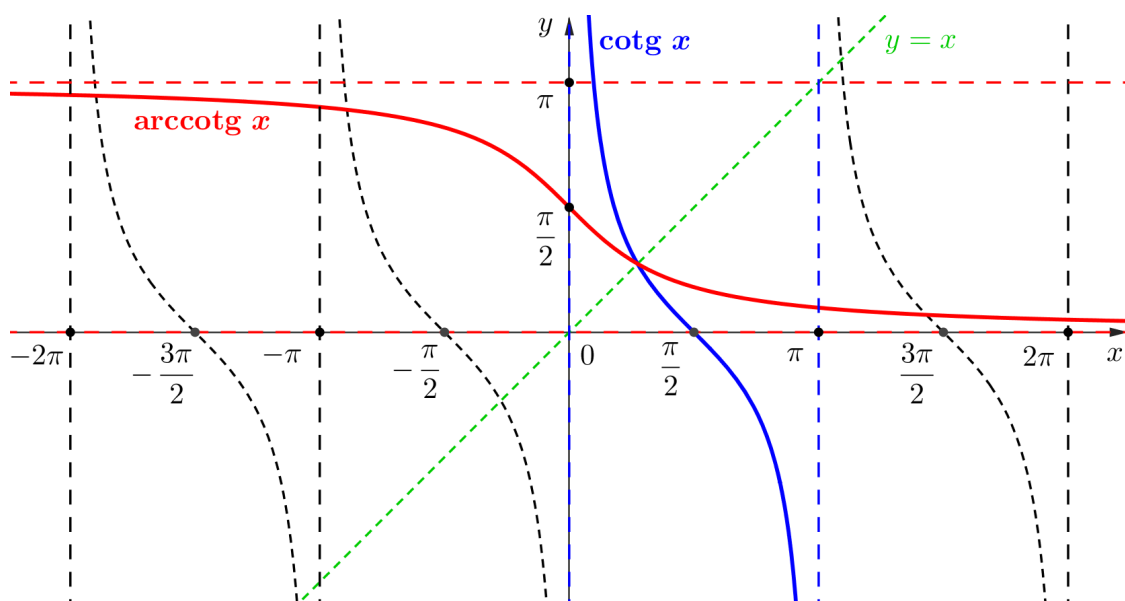
■ $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Inverzní funkce → Cyklometrické funkce

Arkuskotangens $y = \operatorname{arccotg} x$

■ $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = (0, \pi)$



Inverzní funkce → Cyklometrické funkce

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Příklad

Určete inverzní funkci f^{-1} k funkci f a definiční obor funkcí f a f^{-1} .

■ $f : y = \arcsin(1 - x)$

Složená funkce

$$\begin{array}{l} f : y = f(u) \\ g : u = g(x) \end{array} \longrightarrow f \circ g : y = f(g(x))$$

$f \circ g$... **složená funkce**

f ... **vnější složka** složené funkce

g ... **vnitřní složka** složené funkce

$$\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = \sin x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(x^2) = \sin x^2 \end{array} \dots \textit{není totéž!}$$

$\Rightarrow$ Záleží na pořadí, v jakém funkce skládáme!

Složená funkce

Příklad

Určete definiční obor funkce f .

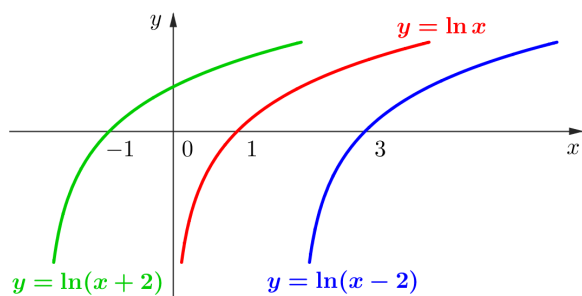
a) $f : y = \sqrt{\sin x}$

b) $f : y = \log_3(4 - x^2)$

Složená funkce → Transformace grafu funkce

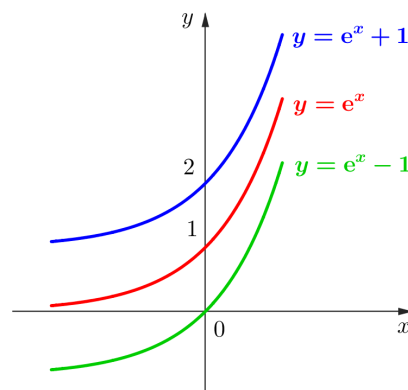
Posunutí ve směru osy x :

$$y = f(x \pm a), \quad a \in \mathbb{R}^+$$



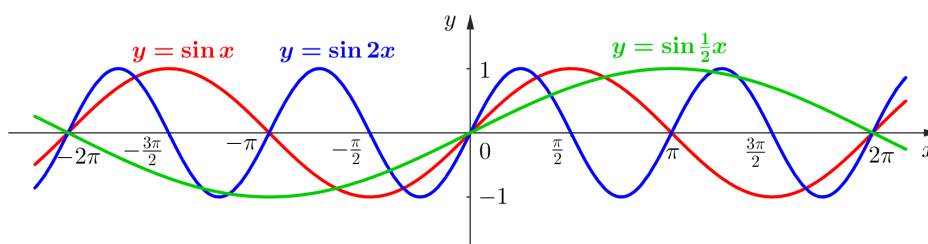
Posunutí ve směru osy y :

$$y = f(x) \pm a, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

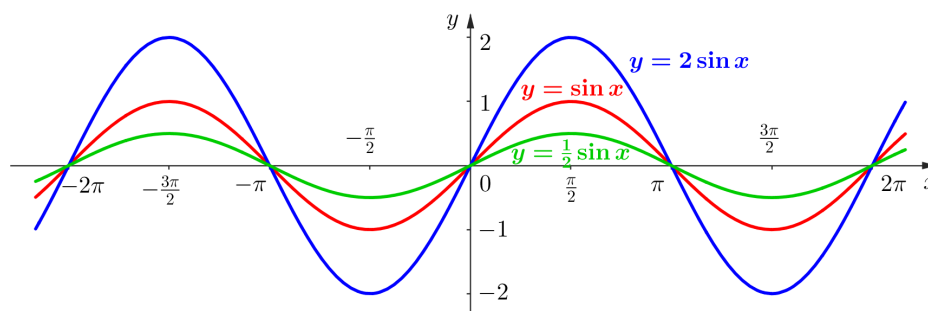


Složená funkce → Transformace grafu funkce

Stlačení / roztažení ve směru osy x : $y = f(ax), \quad a \in \mathbb{R}^+$

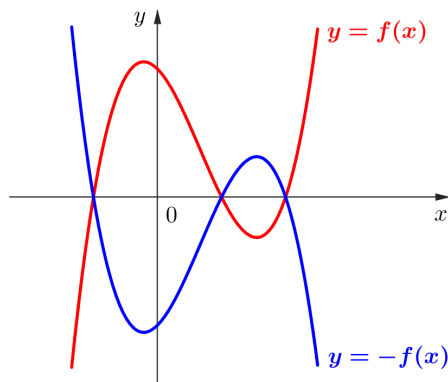


Stlačení / roztažení ve směru osy y : $y = af(x), \quad a \in \mathbb{R}^+$



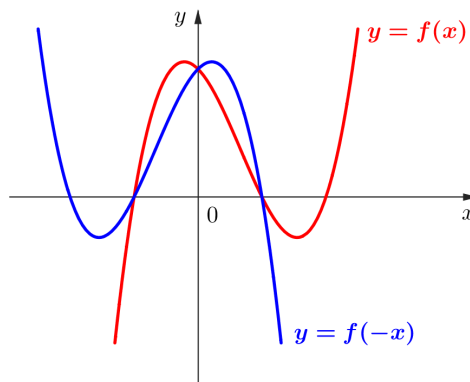
Překlopení podle osy x :

$$y = -f(x)$$



Překlopení podle osy y :

$$y = f(-x)$$



Parametrické zadání funkce

Proměnné x a y vyjádříme pomocí nové proměnné t :

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

Přirozená parametrizace:

$$y = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle$$

↓

$$x = t$$

$$y = f(t), \quad t \in \langle a, b \rangle$$

**DĚKUJI
ZA
POZORNOST!**