

BAA001 Matematika 1

REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

Polynomy

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Polynomy

Definice

Reálný polynom n -tého stupně je reálná funkce definovaná v $\mathbb{R}$ tvaru

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$; $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

- $a_0, \dots, a_n$ **koeficienty** polynomu
- a_0 **absolutní člen**
- $n = \text{st } f$ **stupeň** polynomu

Poznámka:

Polynom stupně

- 0 je **konstantní** funkce ... např. $P_0(x) = 7$
- 1 je **lineární** funkce ... např. $P_1(x) = 5x - 1$
- 2 je **kvadratická** funkce ... např. $P_2(x) = 3x^2 - 4x + 2$

Polynomy → Operace s polynomy

Operace s polynomy

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad g(x) = Q_m(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

1) Sčítání, odčítání polynomů

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \pm b_k) x^k \quad \text{pro } n \geq m$$

Sčítáme / odčítáme koeficienty u odpovídajících si mocnin.

2) Násobení polynomu konstantou

$$r \cdot f(x) = \sum_{k=0}^n r a_k x^k \quad \text{pro } r \in \mathbb{R}$$

3) Násobení polynomů

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k, \text{ kde } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

Násobíme postupně každý sčítanec prvního polynomu všemi sčítanci druhého polynomu.

Platí

$$\text{st}(f + g) \leq \max(\text{st } f, \text{st } g)$$

$$\text{st}(f \cdot g) = \text{st } f + \text{st } g$$

4) Dělení polynomů

Jsou-li P_n , Q_m polynomy stupňů $n \geq m > 0$, pak existují právě dva polynomy H_{n-m} , R_j (stupňů $n - m$, $j < m$) pro které platí

$$P_n = Q_m \cdot H_{n-m} + R_j, \text{ tj.}$$

$$\frac{P_n}{Q_m} = H_{n-m} + \frac{R_j}{Q_m}, \text{ pokud } Q_m \neq 0$$

Q_m ... **dělitel**

H_{n-m} ... **podílový polynom**

R_j ... **zbytek**

$R_j = 0$... polynom P_n je **dělitelný** polynomem Q_m

5) Rovnost polynomů

$$P_n = Q_m \Leftrightarrow 1. n = m$$

$$2. a_i = b_i, \text{ pro } i = 0, 1, \dots, n$$

Stupně polynomů a koeficienty u stejných mocnin jsou si rovny.

Definice

Je-li P_n polynom stupně $n \geq 1$, pak

- číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme **kořenem** polynomu P_n , jestliže platí $P_n(x_0) = 0$;
- číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme **k -násobným kořenem** polynomu P_n , jestliže platí $P_n(x) = (x - x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x)$, přičemž $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$;
- výraz $x - x_0$ nazýváme **kořenovým činitelem**.

Kořenové vlastnosti polynomů

- V $\mathbb{C}$ má každý polynom n -tého stupně právě n kořenů (přičemž každý kořen je počítán tolikrát, jaká je jeho násobnost) a platí

$$P_n(x) = a_n(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Jde o tzv. **rozklad polynomu na součin kořenových činitelů**.

- S každým k -násobným kořenem $a + bi$ má polynom také k -násobný kořen $a - bi$.
- Polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.
- Má-li polynom P_n celočíselné koeficienty $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \dots, n$ a
 - kořen $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_0 | a_0$,
 - kořen $x_0 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \Rightarrow p | a_0$, $q | a_n$.

Kořenové vlastnosti polynomů

- Rozklad polynomu v reálném oboru:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_r)^{k_r} \cdot ((x - a_1)^2 + b_1^2)^{\ell_1} \cdot \dots \cdot ((x - a_s)^2 + b_s^2)^{\ell_s},$$

kde polynom P_n má reálné kořeny $x_1, \dots, x_r$ násobností $k_1, \dots, k_r$, komplexní kořeny $a_1 \pm b_1 i, \dots, a_s \pm b_s i$ násobností $\ell_1, \dots, \ell_s$ a platí $k_1 + \dots + k_r + 2\ell_1 + \dots + 2\ell_s = n$.

Jde tedy o součin polynomů tvaru

- $(ex + d)^k$, $e \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$
- $(ax^2 + bx + c)^\ell$, $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$, $\ell \in \mathbb{N}$

Příklad

Najděte reálné kořeny polynomu $f(x)$ a určete jejich násobnost.

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 4)(2x - 1)^3(x^2 + x + 1)(5x^2 + 3)^3$$

Hornerovo schéma

$$P_n(x) = (x - c) \cdot H_{n-1}(x) + d, \quad H_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
$x = c$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	$d = P_n(c)$

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = c \cdot b_{n-1} + a_{n-1}$$

$$b_{n-3} = c \cdot b_{n-2} + a_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$b_0 = c \cdot b_1 + a_1$$

$$d = c \cdot b_0 + a_0$$

je-li $d = 0$ pak c je kořen polynomu $P_n(x)$

Příklad

Určete kořeny a rozklad v reálném oboru polynomu $f(x)$.

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Věta

Na změnu znaménka polynomu mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti.

Příklad

Určete znaménko polynomu $f(x) = x^3(x-2)^5(x+4)(x-5)^4(x+1)^2(x^2+9)$.

Příklad

Určete kořeny, rozklad v reálném oboru a znaménko polynomu $f(x)$.

- a) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
- b) $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2$
- c) $f(x) = x^3 - 3x - 2$

**DĚKUJI
ZA
POZORNOST!**