

BAA001 Matematika I

6. Dílčí úlohy průběhu funkce.

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Funkce rostoucí a klesající, extrémny funkce

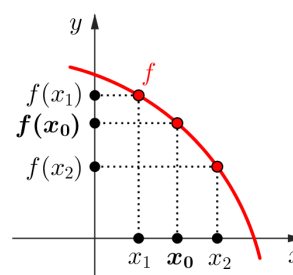
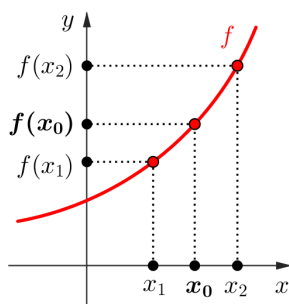
Definice

Funkce f je **rostoucí v bodě** x_0 , existuje-li okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$ takové, že

- 1) $\forall x_1 \in \mathcal{U}(x_0), x_1 < x_0 : f(x_1) < f(x_0),$
- 2) $\forall x_2 \in \mathcal{U}(x_0), x_2 > x_0 : f(x_2) > f(x_0).$

Funkce f je **klesající v bodě** x_0 , existuje-li okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$ takové, že

- 1) $\forall x_1 \in \mathcal{U}(x_0), x_1 < x_0 : f(x_1) > f(x_0),$
- 2) $\forall x_2 \in \mathcal{U}(x_0), x_2 > x_0 : f(x_2) < f(x_0).$



Věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li v intervalu (a, b) derivaci:

- (a) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, pak je f rostoucí na $\langle a, b \rangle$.
- (b) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, pak je f klesající na $\langle a, b \rangle$.

Lokální extrémy

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum (minimum)**, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$) pro $\forall x \in \mathcal{O}(x_0)$. Jsou-li nerovnosti pro $x \neq x_0$ ostré, mluvíme o **ostrém** lokálním maximu, resp. minimu.

Věta

Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že f je

- v $\mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ rostoucí a v $\mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ klesající, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum,
- v $\mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ klesající a v $\mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ rostoucí, pak má f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Věta

Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje derivace $f'(x_0)$. Pak

$$f'(x_0) = 0.$$

Poznámka

- Bod x_0 s vlastností $f'(x_0) = 0$ se nazývá *stacionární bod* funkce.
- Opačně věta neplatí: ve stacionárním bodě funkce nemusí nastat extrém.
- Funkce může mít lokální extrémy ve stacionárních bodech nebo v bodech, ve kterých derivace neexistuje.

Věta

Mění-li derivace funkce při přechodu přes stacionární bod znaménko, má zde funkce lokální extrém.

Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$, tj. x_0 je stacionární bod.

- Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.
- Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Monotonie funkce - příklady

Příklad

Určete lokální extrémy a intervaly monotonie funkce f :

1. $f(x) = x^2 e^{1-x}$

Definice

Řekneme, že funkce f je **konvexní na intervalu I** , jestliže graf funkce leží nad tečnou v libovolném bodě tohoto intervalu, tj. platí

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro } x, x_0 \in I.$$

Řekneme, že funkce f je **konkávní na intervalu I** , jestliže graf funkce leží pod tečnou v libovolném bodě tohoto intervalu, tj. platí

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro } x, x_0 \in I.$$

Věta

Nechť I je otevřený interval a f má druhou derivaci na I .

- (a) Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konvexní na I .
- (b) Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konkávní na I .

Věta

Řekneme, že x_0 je **inflexním bodem** funkce f , jestliže je vlevo od bodu x_0 konkávní a vpravo od tohoto bodu je konvexní, anebo naopak. Stručně říkáme, že funkce f má v bodě x_0 inflexi.

Věta

1. Necht' x_0 je inflexní bod, pak platí:
 - 1.1 Necht' existuje $f''(x_0)$. Pak $f''(x_0) = 0$.
 - 1.2 $f''(x_0)$ neexistuje.
2. Necht' $f''(x_0) = 0$, v levém okolí bodu x_0 platí $f''(x) < 0$ a v pravém okolí bodu x_0 platí $f''(x) > 0$, nebo naopak. Pak je x_0 inflexním bodem funkce f .

Příklad

Určete intervaly konvexnosti/konkávnosti a inflexní body funkce $f(x) = x \ln(x - 1)$.

Asymptoty grafu funkce

Definice (Asymptota bez směrnice)

Přímka

$$x = x_0$$

se nazývá **asymptota bez směrnice** funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže má funkce f v bodě x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Asymptoty bez směrnice

- nazýváme také **svislé asymptoty**
- mohou být v bodech nespojitosti funkce, tj. v bodech $x_0 \notin D(f)$, nebo na okraji definičního oboru
- jsou rovnoběžné s osou y

Definice (Asymptota se směrnicí)

Přímka

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

se nazývá **asymptota se směrnicí** funkce f pro $x \rightarrow \infty$, resp. pro $x \rightarrow -\infty$, právě tehdy, když

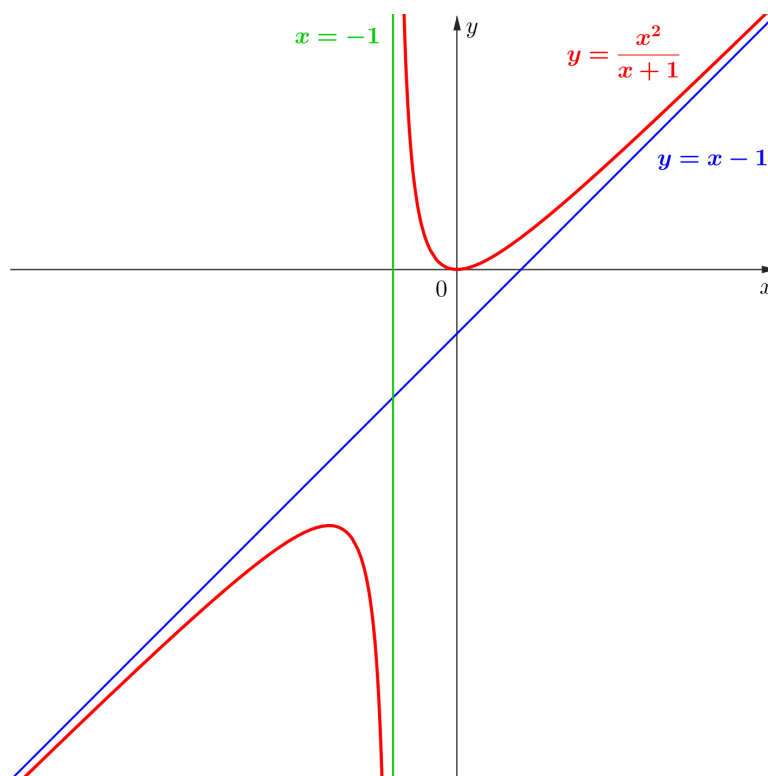
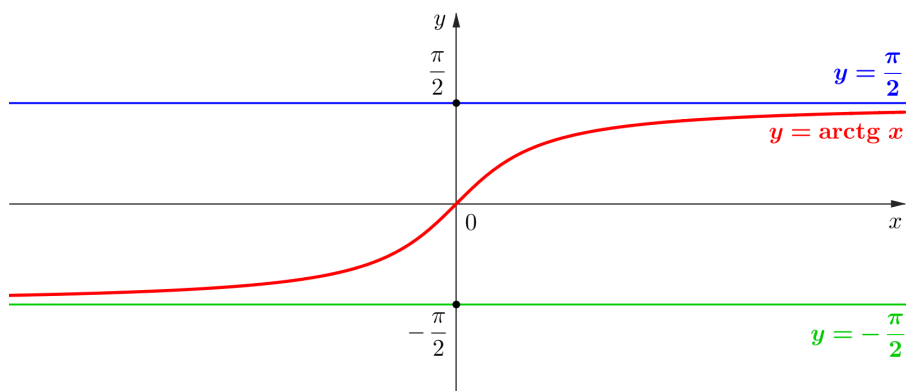
$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$

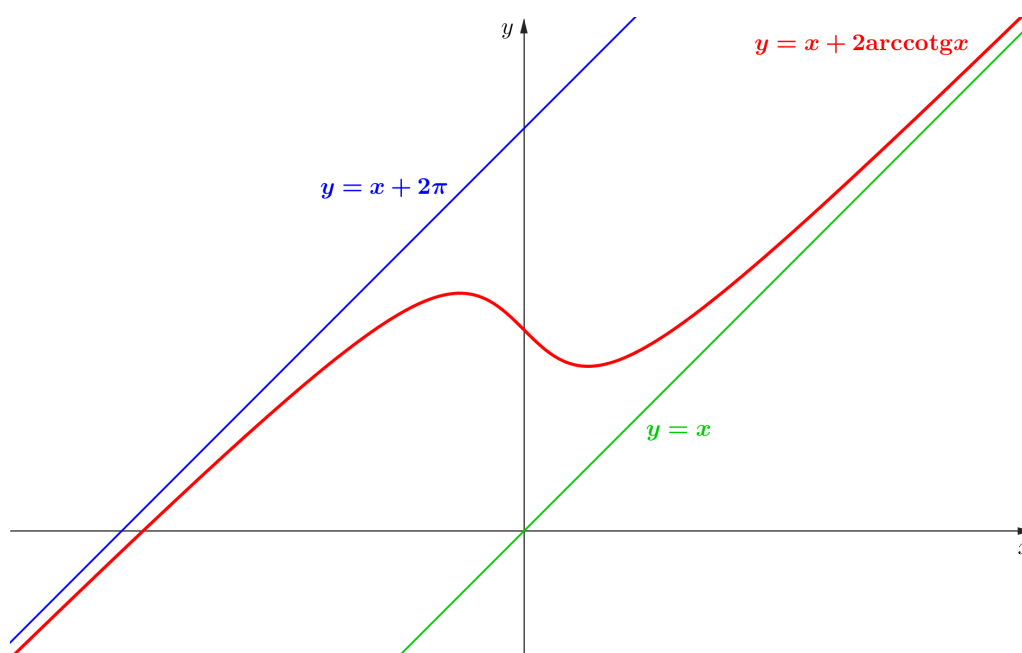
resp.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

Asymptoty se směrnicí

- pro $a = 0$ nazýváme také **vodorovné asymptoty**
- pro $a \neq 0$ nazýváme také **šikmé asymptoty**
- vodorovné asymptoty $y = b$ jsou rovnoběžné s osou x
- šikmé asymptoty $y = ax + b$ protínají osy x a y
- pokud při výpočtu koeficientů a, b jedna z limit **neexistuje** nebo je **nevlastní**, pak funkce asymptotu se směrnicí **nemá**





Příklad

Určete asymptoty funkce f .

a) $f(x) = \frac{6x^2 + 2}{2x - 1}$