FACULTY OF CIVIL ENGINEERING | institute of mathematics and descriptive geometry

BAA001 Matematika I

Aplikace vektorového počtu v analytické geometrii

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Rovina v $\mathbb{E}_3$

FCE

Zápis

$$\rho = [A; \vec{u}; \vec{v}]$$

značí, že rovina ρ je v prostoru $\mathbb{E}_3$ určena bodem $A = [x_A, y_A, z_A] \in \rho$ a dvěma nekolineárními vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ležícími v rovině ρ.

Rovina v $\mathbb{E}_3$

Libovolný bod $X = [x, y, z] \in \rho \Leftrightarrow \overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ jsou komplanární, tj.

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{u} + s\vec{v}, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

1. Parametrická rovnice roviny

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}$$

- $t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry, rozepsáno do souřadnic

$$\begin{aligned} x &= x_A + tu_1 + sv_1, \\ y &= y_A + tu_2 + sv_2, \\ z &= z_A + tu_3 + sv_3. \end{aligned}$$

Rovina v $\mathbb{E}_3$

2. Obecná rovnice roviny

$$ax + by + cz + d = 0$$

Koeficienty $a, b, c,$ jsou souřadnice normálového vektoru roviny ρ, tj.

$$\vec{n} = (a, b, c),$$

kde vektor $\vec{n} \perp \rho$ je kolineární s vektorem $\vec{u} \times \vec{v}$.

3. Úseková rovnice roviny

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

kde p, q, r jsou nenulová čísla nazývaná úseky na osách.
Body $P = [p, 0, 0]$, $Q = [0, q, 0]$, $R = [0, 0, r]$ jsou průsečíky roviny ρ se souřadnicovými osami x, y, z.

Příklad

Určete obecnou rovnici roviny $\rho = [A; \vec{u}; \vec{v}]$, kde $A = [2, 4, 2]$, $\vec{u} = (3, 0, 3)$, $\vec{v} = (-4, -1, 0)$.

Přímka v $\mathbb{E}_3$

Zápis

$$p = [A; \vec{u}]$$

značí, že přímka p je v prostoru $\mathbb{E}_3$ určena bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Přímka v $\mathbb{E}_3$

Libovolný bod $X = [x, y, z] \in p \Leftrightarrow \overrightarrow{AX}, \vec{u}$ jsou kolineární, tj.

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{u}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Parametrické rovnice přímky

$$X = A + t\vec{u}$$

$t \in \mathbb{R}$ je parametr.
Rozepsáno do souřadnic

$$\begin{aligned} p: x &= x_A + tu_1, \\ y &= y_A + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R} \text{ je parametr} \\ z &= z_A + tu_3. \end{aligned}$$

2. Kanonické rovnice přímky

$$p : \frac{x - x_A}{u_1} = \frac{y - y_A}{u_2} = \frac{z - z_A}{u_3} (= t).$$

3. Přímka jako průsečnice dvou rovin

Často je **přímka** zadána **jako průsečnice dvou rovin**

$$p : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases},$$

které nejsou rovnoběžné nebo totožné. To je splněno, když normálové vektory $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ rovin nejsou kolineární. Směrový vektor $\vec{u}$ přímky je kolineární s vektorem $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Přímka v $\mathbb{E}_3$

Příklad

Určete parametrické vyjádření přímky

$$p : \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka $p = [A; \vec{u}]$ a rovina $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ s normálovým vektorem $\vec{n}$:

1. **přímka p leží v rovině α** $\iff$ $\vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = p$
2. **přímka p je rovnoběžná s rovinou α** $\iff$ $\vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = \emptyset$
   $\rightarrow$ Určujeme vzdálenost přímky a roviny.
3. **přímka p je různoběžná s rovinou α** $\iff$ $\vec{u} \not\perp \vec{n}$
   $\rightarrow$ Určujeme úhel a průsečík přímky a roviny.

Úhel přímky a roviny

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ přímky p a roviny α je doplňkem úhlu ψ směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny do $\frac{\pi}{2}$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$.

Protože $\vec{u} \cdot \vec{n} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cos\psi = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \sin\varphi$, platí

$$\boldsymbol{\sin\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\|}}$$

Příklad

Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ:

$$p: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 6t, \end{cases}$$

$$\rho: 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

Vzájemná poloha přímky a roviny

Příklad

Je dán bod $M = [-2, 0, 8]$ a rovina $\rho : -x - y + 2z = 0$. Určete

a) kolmý průmět bodu M do roviny ρ,

b) vzdálenost bodu M od roviny ρ.

Příklad

Je dán bod $M = [3, 2, 6]$ a přímka $p \equiv \{x = t,\ y = -7 + 2t,\ z = 3 - t\}$. Určete

a) kolmý průmět bodu M na přímku p,

b) vzdálenost bodu M od přímky p.

Vzájemná poloha dvou přímek

Vzájemná poloha dvou přímek

Přímky $p = [A; \vec{u}_p]$, $q = [B; \vec{u}_q]$ jsou:

1. **rovnoběžné totožné** $\iff$ $\vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = p = q$

2. **rovnoběžné různé** $\iff$ $\vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$
   → Určujeme vzdálenost rovnoběžek.

3. **různoběžné** $\iff$ $\vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \{R\}$
   → Určujeme úhel a průsečík různoběžek.

4. **mimoběžné** $\iff$ $\vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$
   → Určujeme úhel mimoběžek a jejich nejkratší vzdálenost.

Vzájemná poloha dvou přímek

Úhel dvou přímek

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ přímek p, q je úhlem jejich směrových vektorů $\vec{u}_p$, $\vec{u}_q$.

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{\|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{u}_q\|}$$

Nejkratší vzdálenost mimoběžek

Nejkratší vzdálenost mimoběžek $p = [A; \vec{u}_p]$, $q = [B; \vec{u}_q]$ je určena výškou rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{u}_p$, $\vec{u}_q$, $\overrightarrow{AB}$.

$$v = \frac{|[\vec{u}_p, \vec{u}_q, \overrightarrow{AB}]|}{\|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\|}$$

Úlohy polohy

Příklad

Určete vzájemnou polohu dvou přímek p, q.

a) $p \equiv AB$, $A = [2, 1, 7]$, $B = [-4, -7, 9]$
$q \equiv \{x = 1 + 3t,\ y = 8 + 4t,\ z = 6 - t\}$

b) $p \equiv \{x = -1 + 3t,\ y = -7 + 2t,\ z = 4 - t\}$
$q \equiv \{x = 2 + 3s,\ y = -5 - 2s,\ z = 3 - s\}$

c) $p \equiv \{x = t - 1,\ y = t,\ z = 2t + 1\}$
$q \equiv \{x = s,\ y = 3s - 1,\ z = 4s + 2\}$

Vzájemná poloha dvou rovin

Roviny α a β s normálovými vektory $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ jsou:

1. **rovnoběžné totožné** $\iff$ $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$
2. **rovnoběžné různé** $\iff$ $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \emptyset$
   $\rightarrow$ Určujeme vzdálenost rovin.
3. **různoběžné** $\iff$ $\vec{n}_\alpha \neq k\vec{n}_\beta$
   $\rightarrow$ Určujeme úhel a průsečnici rovin.

Dvě roviny

Úhel dvou rovin

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ rovin α, β je úhlem jejich normálových vektorů $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$.

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$$

Vzájemná poloha dvou rovin

Příklad

Vyšetřete vzájemnou polohu rovin

1. $\alpha : 4x + 2y - 4z + 5 = 0$ a $\beta : 2x + y + 2z - 1 = 0$,
2. $\alpha : x - 3z + 2 = 0$ a $\beta : 2x - 6z - 7 = 0$.