

BAA001 Matematika I

Inverzní matice

Maticové rovnice

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Definice

Matice typu (m, n) , kde $m, n \in \mathbb{N}$ je uspořádaná soustava $m \cdot n$ čísel zapsaných ve tvaru tabulky do m řádků a n sloupců:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$... **prvky matice**

a_{ij} ... prvek ležící v i -tém řádku a j -tém sloupci

– i ... **řádkový index**

– j ... **sloupcový index**

Speciální matice

■ Nulová matice

- $a_{ij} = 0 \quad \dots$ všechny prvky jsou rovny nule

- značíme O

- např.: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

■ Jednotková matice-speciální čtvercová matice

- $\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{pro } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad \dots \quad \begin{array}{l} \text{diagonální matice, kde všechny prvky} \\ \text{hlavní diagonály jsou rovny jedné} \end{array}$

- značíme E

- např.: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Rovnost matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

2) Součet matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n, C = (c_{ij})_m^n$$

$$A + B = C \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

3) Násobení matice číslem k (k -násobek matice)

$$A = (a_{ij})_m^n, C = (c_{ij})_m^n$$

$$kA = C \Leftrightarrow ka_{ij} = c_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

4) Rozdíl matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n$$

$$A - B = A + (-B)$$

kde $-B = (-1) \cdot B$... **opačná matice** k matici B

5) Součin matic

$$A = (a_{ij})_m^n, \quad B = (b_{jk})_n^p, \quad C = (c_{ik})_m^p$$

$$A \cdot B = C \Leftrightarrow c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p$

$$\begin{array}{c}
 \text{\textit{i}-tý řádek} \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 & \dots\dots\dots & & \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 & \dots\dots\dots & &
 \end{array} \right)
 \begin{array}{c}
 \text{\textit{k}-tý sloupec} \\
 \left(\begin{array}{ccc}
 \vdots & b_{1k} & \vdots \\
 \vdots & b_{2k} & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & b_{nk} & \vdots
 \end{array} \right)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{\textit{k}-tý sloupec} \\
 \left(\begin{array}{ccc}
 \dots\dots\dots & & \\
 \cdots & c_{ik} & \cdots \\
 \dots\dots\dots & &
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \text{\textit{i}-tý řádek}
 \end{array}$$

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočtete:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

Poznámka: Násobení matic obecně není komutativní, tj. obecně **neplatí**

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Definice

Čtvercové matice A, B řádu n se nazývají **zaměnitelné** (**komutativní**), jestliže platí $A \cdot B = B \cdot A$.

Platí

A, O, E – čtvercové matice řádu n

1. $A \cdot O = O \cdot A = O$
2. $A \cdot E = E \cdot A = A$

7) Transponování matice

$$A = (a_{ij})_m^n$$

$$A \rightarrow A^T \quad \dots \quad a_{ij} = a_{ji}^T$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

– A^T je typu (n, m) ... **transponovaná matice** k matici A

Definice

Hodnost matice A je celé nezáporné číslo, udávající maximální počet lineárně nezávislých řádků / sloupců matice A .

Značíme $h(A)$.

Platí:

A je matice typu (m, n) , O je nulová matice

- $0 \leq h(A) \leq \min(m, n)$
- $h(O) = 0$
- $h(A^T) = h(A)$

Elementární úpravy matice

1. Výměna řádků / sloupců.
2. Vynásobení řádku / sloupce nenulovým číslem.
3. Přičtení k -násobku jednoho řádku / sloupce k ℓ -násobku jiného řádku / sloupce.

Věta

Elementární úpravy nemění hodnotu matice.

Schodovitá matice

- každý řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí
- $h(A)$ = "počet nenulových řádků"

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá

- **regulární**, jestliže $h(A) = n$
- **singulární**, jestliže $h(A) < n$
→ číslo $n - h(A)$ nazýváme **defekt** (**nulita**) matice A

Příklad

Určete hodnotu matice:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice

Nechť A je čtvercová matice. Existuje-li matice A^{-1} taková, že platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

kde E je jednotková matice, nazýváme A^{-1} **inverzní matice** k matici A .

Věta

Inverzní matice k matici A existuje právě tehdy, když matice A je regulární.

Věta

Nechť A je regulární matice. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.

Výpočet inverzní matice:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{E} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{elementární řádkové úpravy}} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right)$$

Příklad

Vypočtete inverzní matici k matici A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení maticové rovnice o jedné neznámé matici X :

1. Z maticové rovnice osamostatníme neznámou matici X .
2. Neznámou matici X vypočítáme.

Příklad

Z maticové rovnice osamostatněte neznámou matici X .

- a) $2X + A - B = X$
- b) $A \cdot X = B$
- c) $A \cdot X \cdot B = C$

Příklad

Řešte maticovou rovnici.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad

Řešte soustavu maticových rovnic.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$