

BAA001 Matematika I

7. Průběh funkce.

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li v intervalu (a, b) derivaci:

- (a) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, pak je f rostoucí na $\langle a, b \rangle$.
- (b) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, pak je f klesající na $\langle a, b \rangle$.

Věta

Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje derivace $f'(x_0)$. Pak

$$f'(x_0) = 0.$$

Poznámka

- Bod x_0 s vlastností $f'(x_0) = 0$ se nazývá *stacionární bod* funkce.
- Mění-li derivace funkce při přechodu přes stacionární bod znaménko, má zde funkce lokální extrém.
- Funkce může mít lokální extrémy ve stacionárních bodech nebo v bodech, ve kterých derivace neexistuje.

Příklad

Určete lokální extrémy a intervaly monotonie funkce f :

1. $f(x) = e^{x^3-3x},$

2. $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$

Věta

Nechť I je otevřený interval a f má druhou derivaci na I .

(a) Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konvexní na I .

(b) Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konkávní na I .

Věta

Řekneme, že x_0 je **inflexním bodem** funkce f , jestliže je vlevo od bodu x_0 konkávní a vpravo od tohoto bodu je konvexní, anebo naopak. Stručně říkáme, že funkce f má v bodě x_0 inflexi.

Příklad

Určete intervaly monotónnosti, lokální extrémy, intervaly konvexnosti/konkávnosti a inflexní body funkce

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$

2. $f(x) = \ln(2x - x^2),$

3. $f(x) = \ln \frac{3+x}{3-x}$

Definice (Asymptota bez směrnice)

Přímka

$$x = x_0$$

se nazývá **asymptota bez směrnice** funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže má funkce f v bodě x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Asymptoty bez směrnice

- nazýváme také **svislé asymptoty**
- mohou být v bodech nespojitosti funkce, tj. v bodech $x_0 \notin D(f)$, nebo na okraji definičního oboru
- jsou rovnoběžné s osou y

Definice (Asymptota se směrnicí)

Přímka

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

se nazývá **asymptota se směrnicí** funkce f pro $x \rightarrow \infty$, resp. pro $x \rightarrow -\infty$, právě tehdy, když

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$

resp.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

Asymptoty se směrnicí

- pro $a = 0$ nazýváme také **vodorovné asymptoty**
- pro $a \neq 0$ nazýváme také **šikmé asymptoty**
- vodorovné asymptoty $y = b$ jsou rovnoběžné s osou x
- šikmé asymptoty $y = ax + b$ protínají osy x a y
- pokud při výpočtu koeficientů a, b jedna z limit **neexistuje nebo je nevlastní**, pak funkce asymptotu se směrnicí **nemá**

Příklad

Určete asymptoty funkce f .

$$1. \quad f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 3}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2}$$

Příklad

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Příklad

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$.

Příklad

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$.