

BAA001 Matematika I

Skalární, vektorový a smíšený součin

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Výpočet

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3]$$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

- Délka úsečky AB :

$$|AB| = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Využití:

1. Vyšetřování kolmosti nenulových vektorů:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

2. Výpočet délky nenulového vektoru:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \|\vec{u}\|$$

3. Výpočet úhlu nenulových vektorů:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}, \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Výpočet

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\blacksquare \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Determinant vypočteme pomocí Laplaceova rozvoje podle prvního řádku.

Využití:

- Vyšetřování kolinearit nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi, \text{ tj. } \vec{u} = k\vec{v}).$$

- Výpočet obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$:

$$S = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Výpočet obsahu trojúhelníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Nalezení vektoru kolmého ke dvěma daným nenulovým vektorům.

Příklad

Jsou dány vektory $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$.

- Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ kolineární.
- Určete úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.
- Vypočtete obsah rovnoběžníku nad vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$.
- Určete vektor $\vec{x}$ kolmý k vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$: $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

Příklad

Jsou dány body $A = [3, 1, 4]$, $B = [0, 2, 1]$, $C = [5, 0, 8]$. Určete

- a) obsah $\triangle ABC$,
- b) délky stran $\triangle ABC$,
- c) délky výšek $\triangle ABC$,
- d) velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$,
- e) Určete vektor $\vec{x}$ kolmý k vektorům $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ délky $9\sqrt{38}$.

Definice

Smíšeným součinem vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (v tomto pořadí) nazveme číslo

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Výpočet

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Využití:

- Výpočet objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

- Výpočet objemu čtyřstěnu určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

- Vyšetřování komplanárnosti vektorů:

Nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jsou komplanární $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

Příklad

Jsou dány vektory

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

- Ověřte, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nejsou komplanární.
- Vypočtete objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
- Vypočtete obsah stěny určené vektory $\vec{u}, \vec{v}$.
- Určete délku výšky na stěnu určenou vektory $\vec{u}, \vec{v}$.

Příklad

Jsou dány vektory $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

- a) Určete úhel vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$.
- b) Vypočtete obsah rovnoběžníku určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.
- c) Určete vektor $\vec{c}$ kolmý k vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$ takový, že: $c_1 + c_2 + c_3 = 6$.
- d) Určete vektor $\vec{d}$ kolmý k vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$ délky $\sqrt{3}$.
- e) Vypočtete objem čtyřstěnu určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$.