

BAA001 Matematika I

6. Využití derivace.

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

Příklad

Derivujte funkce, určete definiční obory a derivaci upravte:

1. $y = \sqrt{1 - x^2}$

2. $y = \ln \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$

3. $y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{1 + x^2}$

4. $y = 2(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1})$

Definice

Derivace n -tého řádu v bodě x_0 , pro $n \geq 2$:

$$f^{(n)}(x_0) = [f^{(n-1)}]'(x_0)$$

Derivace 1. řádu: $f'(x)$

Derivace 2. řádu: $f''(x) = [f'(x)]'$

Derivace 3. řádu: $f'''(x) = [f''(x)]'$

Derivace 4. řádu: $f^{(4)}(x) = [f'''(x)]'$

Derivace 5. řádu: $f^{(5)}(x) = [f^{(4)}(x)]'$

$\vdots$

Příklad

Určete derivaci 3. řádu funkcí

- $f : y = x(\ln x^2 - 1)$
- $f : y = \operatorname{arctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
- $f : y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$
- $f : y = \operatorname{arccotg} \frac{x + 1}{x - 1}$

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivace až do řádu n , pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

kde $x_0, x \in \mathbb{R}$, se nazývá **Taylorův polynom** stupně n funkce f v bodě x_0 .

Je-li $x_0 = 0 \dots \dots \dots T_n$ – **Maclaurinův polynom**.

Funkce R_n definovaná vztahem $f(x) = T_n(x) + R_n(x) \dots \dots$ **zbytek** řádu n .

Příklad

Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = 1 + \ln(x^2 - 3)$ v bodě $x_0 = 2$.

Příklad

Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = 1 + \ln(x^2 - 3)$ v bodě $x_0 = 2$.

Příklad

Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x) = \frac{2^x}{1 + 2^x}$ v bodě $x_0 = 1$.

Příklad

Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = 1 + \ln(x^2 - 3)$ v bodě $x_0 = 2$.

Příklad

Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x) = \frac{2^x}{1 + 2^x}$ v bodě $x_0 = 1$.

Příklad

Určete Maclaurinův polynom 4. stupně funkce $f(x) = e^{-x^2}$.

Věta

Nechť mají funkce f a g v prstencovém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ konečné derivace a necht' platí jedna z podmínek

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty.$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospitalovo pravidlo používáme na limity typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\pm\frac{\infty}{\infty}\right]$. Limity typu $[0 \cdot \infty]$ nebo $[\infty - \infty]$ se často dají na typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\pm\frac{\infty}{\infty}\right]$ převést.

Příklad

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2 + 3}{2x^2 + x}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\ln x}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} \frac{x^4 - 1}{x^2 + 2}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

Rovnice **tečny** ke grafu funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Rovnice **normály** ke grafu funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$:

■ $f'(x_0) \neq 0$:
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

■ $f'(x_0) = 0$:
$$x = x_0$$

Příklad

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě x_0 :

- $f(x) = x + \sqrt[3]{x-1}$, $x_0 = 2$,
- $f(x) = e^{-x} \cdot \cos 2x$, $x_0 = 0$,
- $f(x) = 1 - e^{\frac{x}{2}}$, v průsečíku s osou x .