

1. Jsou dány body $A[1, 2, 0]$, $B[-1, 1, 3]$, $C[1, 3, -1]$. Určete:
 a) délky stran, obsah a vnitřní úhly trojúhelníka ABC
 b) obecnou rovnici roviny α dané body A, B, C

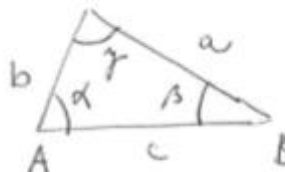
Řešení: $\vec{AB} = (-2, -1, 3)$ $\vec{AC} = (0, 1, -1)$ $\vec{BC} = (2, 2, -4)$

a) délky stran

$$a = \|\vec{BC}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24}$$

$$b = \|\vec{AC}\| = \sqrt{2}$$

$$c = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$



úhly

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \frac{(-2, -1, 3) \cdot (0, 1, -1)}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{28}} = \frac{-4}{\sqrt{28}} = \frac{-4}{\sqrt{4 \cdot 7}} = \frac{-4}{2\sqrt{7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\|} = \frac{(2, 1, -3) \cdot (2, 2, -4)}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{24}} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-4)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{18}{4\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

obsah

$$S = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) - \vec{j}(-2 \cdot (-1) - 3 \cdot 0) + \vec{k}(-2 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) = (-2, -2, -2)$$

b) rovnice roviny α dané A, B, C

$$\vec{n}_\alpha = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-2, -2, -2) = (1, 1, 1) \Rightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{matrix}$$

obecně $ax + by + cz + d = 0$
 $x + y + z + d = 0$

$$A \in \alpha$$

$$A[1, 2, 0] \quad 1 + 2 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

$$\alpha: x + y + z - 3 = 0$$

2. Jsou dány vektory $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(1,2,1)$. Určete:

a) vektor $\vec{x}$ délky 5 kolmý k vektorům $\vec{a}, \vec{b}$

b) obsah rovnoběžníka nad vektory $\vec{a}, \vec{b}$

Řešení:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2-6) - \vec{j}(1-3) + \vec{k}(2-2) = (-4, 2, 0)$$

$$a) \vec{x} = k(-4, 2, 0) = (-4k, 2k, 0)$$

$$\|\vec{x}\| = 5 = \sqrt{(-4k)^2 + (2k)^2 + 0^2}$$

$$5 = \sqrt{16k^2 + 4k^2}$$

$$5 = \sqrt{20k^2}$$

$$5 = 2\sqrt{5}k \Rightarrow k = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\vec{x}} = \left(-4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}, 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right) = \boxed{(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0)}$$

$$b) \boxed{S} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5} \text{ j.}^2}$$

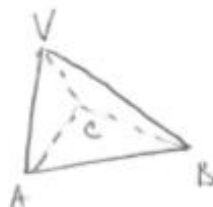
3. Určete objem a výšku čtyřstěnu ABCV; $A[3, 5, 3]$, $B[-2, 11, -5]$, $C[1, -1, 4]$, $V[0, 6, 4]$

Řešení:

$$\vec{AB} = (-5, 6, -8)$$

$$\vec{AC} = (-2, -6, 1)$$

$$\vec{AV} = (-3, 1, 1)$$



objem čtyřstěnu $V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AV}]|$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AV}] = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 0 & -7 \\ -2 & -6 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & 0 & -7 \\ -20 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1 \cdot (-1)^{3+2}}{-1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -7 \\ -20 & 7 \end{vmatrix} =$$

rozvoj podle 2. sloupce

$$= -(-7 \cdot 7 - (-7) \cdot (-20)) = -(-49 - 140) = 189$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 189 = 31,5 \text{ j}^3$$

výška čtyřstěnu:

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot \kappa \Rightarrow \kappa = \frac{3V}{S_p}$$

$$S_p \text{ (obsah podstavy)} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(6-48) - \vec{j}(-5-16) + \vec{k}(30+12) = (-42, 21, 42)$$

$$S_p = \frac{1}{2} \sqrt{(-42)^2 + 21^2 + 42^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3969} = \frac{63}{2} = 31,5$$

$$\kappa = \frac{3V}{S_p} = \frac{3 \cdot 31,5}{31,5} = 3 \text{ j}$$

4. Jsou dány vektory $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(4,1,1)$, $\vec{c}(2,1,2)$. Určete:

a) objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

b) obsah základny určené vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a výšku rovnoběžnostěnu nad touto základnou

Řešení:

a)

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

objem rovnoběžnostěnu

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{matrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 2 + 12 + 4 - 6 - 1 - 16 = -5$$

$$V = |-5| = 5$$

$$b) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2-3) - \vec{j}(1-12) + \vec{k}(1-8) = (-1, 11, -7)$$

obsah rovnoběžníka (základny určené $\vec{a}, \vec{b}$)

$$S = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{(-1)^2 + 11^2 + (-7)^2} = \sqrt{1 + 121 + 49} = \sqrt{171}$$

výška

$$v = \frac{V}{S} = \frac{5}{\sqrt{171}}$$