

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

LU ROZKLAD MATICE

– Čtvercovou regulární matici A řádu 3 rozložíme na součin

$$A = L \cdot U, \text{ kde}$$

- U je horní trojúhelníková matice, která vznikne převedením matice A na schodovitý tvar,
- L je dolní trojúhelníková matice tvořena jedničkami na hlavní diagonále a všemi násobky (multiplikátory) použitými při úpravě matice A s opačným znaménkem.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

– Výpočet matice U :

1. *krok*: Vhodné násobky 1. řádku přičteme k 2. a 3. řádku tak, abychom v 1. sloupci pod 1. řádkem dostali nuly.
2. *krok*: Vhodný násobek 2. řádku přičteme k 3. řádku tak, abychom v 2. sloupci pod 2. řádkem dostali nulu.

⇒ Při převodu matice A na schodovitý tvar

- smíme pouze přičítat násobek řádku k řádkům pod ním tak, abychom matici A převedli na schodovitý tvar;
- **nesmíme** zaměňovat řádky, vynásobit řádek nějakým číslem, přičítat násobek řádku k řádku nad ním.

ŘEŠENÍ SLAR POMOCÍ LU ROZKLADU

- Hledáme řešení soustavy $A \cdot X = B$, kde A je regulární matice.
- Využíváme k řešení série soustav se stejnou maticí soustavy a různými vektory pravých stran.

– **Postup**:

$$\begin{array}{l} \underbrace{A}_{L \cdot U} \cdot X = B \\ \downarrow \\ L \cdot \underbrace{U \cdot X}_Y = B \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{lll} 1. & L \cdot Y = B & \longrightarrow Y \\ 2. & U \cdot X = Y & \longrightarrow X \end{array}$$

Příklad: Určete LU rozklad matice A a ověřte správnost výpočtu.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & 15 \\ -1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Příklad: Pomocí LU rozkladu řešte soustavu $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$