

BAA001 Matematika I

Aplikace vektorového počtu v analytické geometrii

Mgr. EVA JANSOVÁ, Ph.D.

1. Parametrická rovnice roviny

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}$$

- $t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry, rozepsáno do souřadnic

$$x = x_A + tu_1 + sv_1,$$

$$y = y_A + tu_2 + sv_2,$$

$$z = z_A + tu_3 + sv_3.$$

2. Obecná rovnice roviny

$$ax + by + cz + d = 0$$

Koeficienty a, b, c , jsou souřadnice normálového vektoru roviny ρ , tj.

$$\vec{n} = (a, b, c),$$

kde vektor $\vec{n} \perp \rho$ je kolineární s vektorem $\vec{u} \times \vec{v}$.

Příklad

Určete obecnou rovnici roviny $\rho = [A; B, C]$, kde $A = [-1, 2, 3]$,
 $B = [2, -4, 5]$, $C = [2, 2, -1]$.

1. Parametrické rovnice přímky

$$X = A + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Rozepsáno do souřadnic

$$\begin{aligned} p : x &= x_A + tu_1, \\ y &= y_A + tu_2, \\ z &= z_A + tu_3. \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R} \text{ je parametr}$$

2. Přímka jako průsečnice dvou rovin

$$p : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases},$$

Směrový vektor $\vec{u}$ přímky je kolineární s vektorem $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Příklad

Určete parametrické vyjádření přímky

$$p : \begin{cases} x + y - z - 8 = 0 \\ 3x - y - z - 12 = 0 \end{cases} .$$

Přímka $p = [A; \vec{u}]$ a rovina $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ s normálovým vektorem $\vec{n}$:

- 1. přímka p leží v rovině α** $\iff \vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = p$
- 2. přímka p je rovnoběžná s rovinou α** $\iff \vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = \emptyset$
 $\rightarrow$ Určujeme vzdálenost přímky a roviny.
- 3. přímka p je různoběžná s rovinou α** $\iff \vec{u} \not\perp \vec{n}$
 $\rightarrow$ Určujeme úhel a průsečík přímky a roviny.

Úhel přímky a roviny

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ přímky p a roviny α

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\|}$$

Příklad

Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ :

$$p : \begin{cases} x - 2y + 3z - 7 = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases},$$

$$\rho : 2x + 2y - z - 1 = 0.$$

Příklad

Je dán bod $M = [4, -3, 1]$ a rovina ρ

$$x = 2 + s,$$

$$y = 1 + t + s,$$

$$z = 1 + 2t + 3s.$$

Určete

- a) kolmý průmět bodu M do roviny ρ ,
- b) vzdálenost bodu M od roviny ρ .

Příklad

Je dán bod $M = [3, 2, 6]$ a přímka $p \equiv \{x = t, y = -7 + 2t, z = 3 - t\}$.
Určete

- a) kolmý průmět bodu M na přímku p ,
- b) vzdálenost bodu M od přímky p .

Vzájemná poloha dvou přímek

Přímky $p = [A; \vec{u}_p]$, $q = [B; \vec{u}_q]$ jsou:

1. rovnoběžné totožné $\iff \vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = p = q$

2. rovnoběžné různé $\iff \vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$

→ Určujeme vzdálenost rovnoběžek.

3. různoběžné $\iff \vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \{R\}$

→ Určujeme úhel a průsečík různoběžek.

4. mimoběžné $\iff \vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$

→ Určujeme úhel mimoběžek a jejich nejkratší vzdálenost.

Úhel dvou přímek

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ přímek p, q je úhlem jejich směrových vektorů $\vec{u}_p, \vec{u}_q$.

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{\|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{u}_q\|}$$

Nejkratší vzdálenost mimoběžek

Nejkratší vzdálenost mimoběžek $p = [A; \vec{u}_p]$, $q = [B; \vec{u}_q]$ je určena výškou rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{u}_p, \vec{u}_q, \overrightarrow{AB}$.

$$v = \frac{|[\vec{u}_p, \vec{u}_q, \overrightarrow{AB}]|}{\|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\|}$$

Příklad

Určete vzájemnou polohu dvou přímek p, q .

a) $p \equiv AB, A = [-2, 2, 1], B = [0, 3, 2]$

$$q \equiv \{x = -2 + 2s, y = 3 + s, z = 2 + s\}$$

b) $p \equiv \{x + y + z = 0, 2x - y + 2z - 3 = 0\}$

$$q \equiv \{x - y - z - 2 = 0, 3x - 4z - 3 = 0\}$$

c) $p \equiv \{x = -1 + 3t, y = -7 + 2t, z = 4 - t\}$

$$q \equiv \{x = 2 + 3s, y = -5 - 2s, z = 3 - s\}$$

d) $p \equiv \{x = 4, y = 5 + t, z = 2t + 1\}$

$$q \equiv \{x - y - z - 4 = 0, x + y - 3z = 0\}$$