Substituční metoda

Vzorec pro integraci substitucí zapisujeme ve tvaru

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

kde $t = \varphi(x)$. V zápisu neurčitého integrálu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ má symbol $\mathrm{d}x$ význam činitele rovného diferenciálu proměnné x.
Při záměně proměnné určujeme vztah mezi diferenciály nové a staré proměnné, a ten pak dosazujeme do integrálu.

Příklad 1. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x}$ na intervalu $(0,\,1)$ a $(1,\,\infty)$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x} &= \begin{vmatrix} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{vmatrix} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \\
&= \int t^{-3}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t^{-2}}{-2} + c \\
&= \frac{-1}{2\ln^2 x} + c
\end{aligned}$$

Příklad 2. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ na intervalu
$(-\pi/2 + k\pi,\ \pi/2 + k\pi)$.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{vmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= -\ln t + c \\
&= -\ln(\cos x) + c
\end{aligned}$$

Příklad 3. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-(3\cos x+5)^2}}\,\mathrm{d}x$ na intervalu $\langle -2,\,-\frac{4}{3}\rangle$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-(3\cos x+5)^2}}\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} t = 3\cos x + 5 \\ \mathrm{d}t = -3\sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{d}t}{3\sin x} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= -\frac{1}{3}\arcsin t + c \\
&= -\frac{1}{3}\arcsin(3\cos x + 5) + c
\end{aligned}$$

Příklad 4. Vypočtěte neurčitý integrál $\int x \operatorname{tg}(1-x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $x^2 \neq 1 - \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{tg}(1-x^2)\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} t = 1 - x^2 \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\int \operatorname{tg} t\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln|\cos t| + c \\
&= \frac{1}{2}\ln|\cos(1-x^2)| + c
\end{aligned}$$

Příklad 5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} t = 2 + \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \\
&= -\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\sqrt{t} + c \\
&= -2\sqrt{2+\cos x} + c
\end{aligned}$$

Příklad 6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{x\,\ln x \ln(\ln x)}\,\mathrm{d}x$ pro $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq \mathrm{e}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\,\ln x \ln(\ln x)}\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \end{vmatrix} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \\
&= \ln|\ln t| + c \\
&= \ln|\ln(\ln x)| + c
\end{aligned}$$

Příklady k procvičení

1. Metodou substituce vypočtěte:
   - $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + c\right]$
   - $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\cos\frac{1}{x} + c\right]$
   - $\int \frac{4x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ $\left[-2\sqrt{1-x^4} + c\right]$
   - $\int \mathrm{e}^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$ $\left[\mathrm{e}^{\sin x} + c\right]$
   - $\int \frac{1}{1-x^2}\,\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x} + c\right]$
2. Kombinováním metody per partes a metody substituce vypočtěte:
   - $\int \arcsin\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$ $\left[x\arcsin\frac{x}{3} + 3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + c\right]$

- $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ $\quad [x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c]$
- $\int x^3 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}\left(x^2-1\right)+c\right]$
- $\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(x^2+2)+c\right]$