Integrace racionálních funkcí

Obecný postup

Racionální funkci vyjádříme jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, kterou pak rozložíme na součet parciálních zlomků. Získaný rozklad integrujeme člen po členu.

Parciální zlomky

Při rozkladu ryze lomené racionální funkce postupujeme tak, že nejprve rozložíme jmenovatele v $\mathbb{R}$, napíšeme si formální tvar rozkladu na parciální zlomky a určíme konstanty. V tomto rozkladu vystupují zlomky tvaru:

$$\frac{A}{x-x_0}, \frac{A}{(x-x_0)^n}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

kde A, B, C, p, q jsou reálné konstanty, n, m jsou přirozená čísla a polynom x^2+px+q nemá reálné kořeny.

Jak integrovat jednotlivé zlomky:

1. Integrace zlomků $\frac{A}{x-x_0}$ a $\frac{A}{(x-x_0)^n}$ je poměrně jednoduchá. Použijeme substituci $x - x_0 = t$ a obdržíme:
   - $\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{x-x_0} = A\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = A\,\ln|t| + c = A\,\ln|x-x_0| + c$
   - $\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(x-x_0)^n} = A\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-x_0)^n} = A\int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = A\int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{-n+1}\,t^{-n+1} = \frac{A}{(1-n)(x-x_0)^{n-1}} + c$

2. Zlomek $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)}$ nejprve upravíme takto:

$$\begin{aligned}\frac{Bx+C}{x^2+px+q} &= \frac{\frac{B}{2}(2x+p) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)}{x^2+px+q} \\ &= \frac{\frac{B}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{x^2+px+q}\end{aligned}$$

   Nyní integrujeme

$$\int \frac{(Bx+C)\,\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \frac{B}{2}\int \frac{(2x+p)\,\mathrm{d}x}{x^2+px+q} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}.$$

   Pro výpočet prvního integrálu použijeme substituci

$$\begin{aligned}t &= x^2+px+q \\ \mathrm{d}t &= (2x+p)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

   a platí tedy

$$\begin{aligned}\frac{B}{2}\int \frac{(2x+p)\,\mathrm{d}x}{x^2+px+q} &= \frac{B}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{B}{2}\ln|t| + c \\ &= \frac{B}{2}\ln|x^2+px+q| + c.\end{aligned}$$

   Zbývá nám vyřešit výpočet druhého integrálu. Nejprve výraz
   x^2+px+q doplníme na čtverec: $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ a poté výrazy $\frac{p}{2}$ a $q - \frac{p^2}{4}$ nahradíme takto:

$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=(x+u)^2+v^2$, kde $u\in\mathbb{R}$ a $v>0$. Potom

$$\begin{aligned}
\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} &= \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+u)^2+v^2}\\
&= \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{v^2\left(\left(\frac{x+u}{v}\right)^2+1\right)}\\
&= \left|\frac{x+u}{v}=t, \mathrm{d}x=v\,\mathrm{d}t\right|\\
&= \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{v\,\mathrm{d}t}{v^2(t^2+1)}\\
&= \left(C-\frac{Bp}{2}\right)v^{-1}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\\
&= \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{v}\operatorname{arctg}t\\
&= \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{v}\operatorname{arctg}\frac{x+u}{v}.
\end{aligned}$$

3. Podobně upravíme zlomek

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}=\frac{\frac{B}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^m}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^m}$$

a integrujeme podobně jako u předcházejícího zlomku. Vyjde nám tedy

$$\frac{B}{2}\int\frac{(2x+p)\,\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m}.$$

Pro výpočet prvního integrálu opět použijeme substituci

$$\begin{aligned}
t&=x^2+px+q\\
\mathrm{d}t&=(2x+p)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

která nám dává

$$\begin{aligned}
\frac{B}{2}\int\frac{(2x+p)\,\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m} &= \frac{B}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^m}\\
&= \frac{B}{2(1-m)}\frac{1}{t^{m-1}}\\
&= \frac{B}{2(1-m)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}}.
\end{aligned}$$

Při výpočtu druhého integrálu postupujeme opět stejně, použijeme stejné nahrazení, poté stejnou substituci a dostáváme

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{((x+u)^2+v^2)^m} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{v^{2m}\left(\left(\frac{x+u}{v}\right)^2+1\right)^m}\\
&= \int\frac{v\,\mathrm{d}t}{v^{2m}(t^2+1)^m}\\
&= v^{1-2m}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^m}.
\end{aligned}$$

Poslední problém: určit $K_n(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$, pro $n=1,2,3,\dots$. Pro výpočet tohoto integrálu jsme v příkladu **??** odvodili rekurentní vzorec

$$K_{n+1}=\frac{x}{2n\,(x^2+1)^n}+\frac{2n-1}{2n}K_n(x)+c.$$

Příklad 1. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{2x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x$ pro $x \neq -1$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x &= 2\int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \\
&= \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x - 2\ln|x+1| + c
\end{aligned}$$

Příklad 2. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{(x-3)^3}\,\mathrm{d}x$ pro $x \neq 3$.

$$\int \frac{1}{(x-3)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2(x-3)^2} + c$$

Příklad 3. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-6x+9)+4} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2+4} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + c
\end{aligned}$$

Příklad 4. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x + \int \frac{7}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)+5} \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+5} \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}} + c
\end{aligned}$$

Příklad 5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x^2-3x+1}{(x+3)(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x$ pro $x \neq -3$.
Nejprve rozložíme funkci $\frac{x^2-3x+1}{(x+3)(x^2-2x+5)}$ na parciální zlomky. Nalezneme konstanty A, B, C tak, aby platila identicky rovnost

$$\frac{x^2-3x+1}{(x+3)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}.$$

To znamená:

$$\begin{aligned}
x^2 - 3x + 1 &= A(x^2-2x+5) + (Bx+C)(x+3) \\
x^2 - 3x + 1 &= A(x^2-2x+5) + B(x^2+3x) + C(x+3)
\end{aligned}$$

Srovnáním koeficientů u x^2, x^1 a x^0 dostáváme soustavu tří lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
1 &= A + B \\
-3 &= -2A + 3B + C \\
1 &= 5A + 3C.
\end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme $A = \frac{19}{20}$, $B = \frac{1}{20}$, $C = \frac{-5}{4}$. Platí tedy rozklad

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{(x+3)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{19}{20(x+3)} + \frac{\frac{1}{20}\,x - \frac{5}{4}}{x^2 - 2x + 5}.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 - 3x + 1}{(x+3)(x^2 - 2x + 5)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{19}{20(x+3)} + \frac{\frac{1}{20}\,x - \frac{5}{4}}{x^2 - 2x + 5} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{19}{20} \int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} + \int \frac{\frac{1}{40}(2x-2) - \frac{5}{4} + \frac{2}{40}}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{19}{20} \ln|x+3| + \frac{1}{40} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x - \\
&\quad - \frac{24}{20} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x + 5} \\
&= \frac{19}{20} \ln|x+3| + \frac{1}{40} \ln|x^2 - 2x + 5| - \\
&\quad - \frac{6}{5} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2 + 4} \\
&= \left| \begin{matrix} x - 1 = 2t \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| \\
&= \frac{19}{20} \ln|x+3| + \frac{1}{40} \ln|x^2 - 2x + 5| - \\
&\quad - \frac{6}{5} \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{4t^2 + 4} \\
&= \frac{19}{20} \ln|x+3| + \frac{1}{40} \ln|x^2 - 2x + 5| - \\
&\quad - \frac{3}{5} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + c.
\end{aligned}$$

Příklad 6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.
Nejprve rozložíme funkci $\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ na parciální zlomky takto:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2}$$

Tuto rovnici vynásobíme $(x^2 + 1)^2$ a obdržíme

$$\begin{aligned}
x^2 &= (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D \\
&= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D).
\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = -1$ a platí tedy rozklad

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} \\
&= \operatorname{arctg} x - K_2(x)
\end{aligned}$$

a podle příkladu **??** dále obdržíme

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c \\
&= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} x - \frac{x}{x^2+1} \right) + c.
\end{aligned}$$

Příklad 7. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{x^4+64}\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4+64}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+8)^2-16x^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+8-4x)(x^2+8+4x)} \\
&= \int \left(\frac{Ax+B}{x^2-4x+8} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+8} \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Rozkladem na parciální zlomky obdržíme $A = -\frac{1}{64}$, $B = \frac{1}{16}$, $C = \frac{1}{64}$, $D = \frac{1}{16}$ a tedy

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{-\frac{1}{64}x + \frac{1}{16}}{x^2-4x+8} + \frac{\frac{1}{64}x + \frac{1}{16}}{x^2+4x+8} \right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{16} \int \frac{\frac{1}{4}x - 1}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{16} \int \frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{16} \int \frac{\frac{1}{8}(2x-4) - 1 + \frac{1}{2}}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{16} \int \frac{\frac{1}{8}(2x+4) + 1 - \frac{1}{2}}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{128} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{32} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} + \\
&\quad + \frac{1}{128} \int \frac{2x+4}{x^2-4x+8}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{32} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} \\
&= -\frac{1}{128} \ln|x^2-4x+8| + \frac{1}{32} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)+4} + \\
&\quad + \frac{1}{128} \ln|x^2+4x+8| + \frac{1}{32} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+4)+4} \\
&= -\frac{1}{128} \ln|x^2-4x+8| + \frac{1}{64} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + \\
&\quad + \frac{1}{128} \ln|x^2+4x+8| + \frac{1}{64} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + c.
\end{aligned}$$

Příklady k procvičení

Vypočtěte neurčité integrály:

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+6)^5}$ $\left[\frac{-1}{4(x+6)^4} + c\right]$

2. $\int \frac{3x^2-10x+4}{x^3-x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$ $\left[\ln\left|\frac{(x-1)(x+2)^3}{x-2}\right| + c\right]$

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ $\left[\frac{1}{6}\ \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3} + c\right]$

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$ $\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c\right]$

5. $\int \frac{3x^3-14x^2+27x-16}{(x^2-4x+3)(x^2-2x)}\,\mathrm{d}x$ $\left[-3\ln|x-2| + \frac{8}{3}\ln x + \frac{10}{3}\ln x - 3 + c\right]$