Metoda per partes

Pravidlo pro integraci per partes zapisujeme ve tvaru

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x, x \in I. \tag{1}$$

Příklad 1. Vypočtěte neurčitý integrál $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(-\infty,\, \infty)$.

$$\begin{aligned}
\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u\,(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v\,(x) = \mathrm{e}^x \end{vmatrix} \\
&= x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
&= x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c
\end{aligned}$$

Příklad 2. Vypočtěte neurčitý integrál $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(-\infty,\, \infty)$.

$$\begin{aligned}
\int x\sin x\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u(x) = x & u'(x) = \;\; 1 \\ v'(x) = \sin x & v(x) = -\cos x \end{vmatrix} \\
&= -\,x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x \\
&= -\,x\cos x + \sin x + c
\end{aligned}$$

Poznámka. Obecněji: pro $\int x^k f(x)\,\mathrm{d}x$ uplatňujeme integraci per partes opakovaně (k-krát po sobě). Totéž platí pro $\int P(x)f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $P(x)$ je polynom.

Příklad 3. Vypočtěte neurčitý integrál $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(-\infty,\, \infty)$.

$$\begin{aligned}
\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u(x) = x^2 & u'(x) = 2\,x \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{vmatrix} \\
&= x^2\mathrm{e}^x - \int 2\,x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{vmatrix} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{vmatrix} \\
&= x^2\mathrm{e}^x - 2\left(x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) \\
&= x^2\mathrm{e}^x - 2\,x\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x + c
\end{aligned}$$

Příklad 4. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u(x) = \operatorname{arctg} x & u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x)' = 1 & v(x) = x \end{vmatrix} \\
&= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \,\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x \,\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c
\end{aligned}
$$

Příklad 5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \ln x \,\mathrm{d}x$ na intervalu $(0, \infty)$.

$$
\begin{aligned}
\int \ln x \,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{vmatrix} \\
&= x \ln x - \int \frac{1}{x} x \,\mathrm{d}x \\
&= x \ln x - \int \mathrm{d}x \\
&= x \ln x - x + c
\end{aligned}
$$

Příklad 6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

$$
\begin{aligned}
\int \arcsin x \,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u(x) = \arcsin x & u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{vmatrix} \\
&= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \\
&= \begin{vmatrix} t = 1 - x^2 \\ \mathrm{d}t = -2x \,\mathrm{d}x \end{vmatrix} \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int t^{-1/2} \,\mathrm{d}t \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2}\, 2\, t^{1/2} + c \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}
$$

V následujícím příkladu si ukážeme řešení neurčitých integrálů metodou per partes vedoucí na rovnici.

Příklad 7. Vypočtěte neurčitý integrál $I = \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x$ na intervalu $(-\infty,\, \infty)$.

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u(x) = \mathrm{e}^x & u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin x & v(x) = -\cos x \end{vmatrix} \\
&= -\cos x \mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= \begin{vmatrix} u(x) = \mathrm{e}^x & u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \sin x \end{vmatrix} \\
&= -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Poslední integrál převedeme na levou stranu:

$$\begin{aligned}
2 \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x + c \\
\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^x}{2} \left(\sin x - \cos x\right) + c
\end{aligned}$$

Příklady k procvičení

Metodou per partes vypočtěte:

- $\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$ $\quad \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c\right]$
- $\int (x^3 + x^2)\, \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ $\quad \left[\mathrm{e}^x x^3 - 2\mathrm{e}^x x^2 + 4x\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^x + c\right]$
- $\int x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{1}{4}\left(x^2 + x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x\right) + c\right]$
- $\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{\mathrm{e}^x}{2} \left(\sin x + \cos x\right) + c\right]$
- $\int \ln^3 x \,\mathrm{d}x$ $\quad \left[x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x + c\right]$