Integrace goniometrických funkcí

Integraci funkcí typu $R(\sin x, \cos x)$ lze vždy převést na integraci racionálních funkcí použitím vhodné substituce.

Substituce speciální

- Je-li $R(\sin x, \cos x)$ lichou funkcí vzhledem ke $\cos x$, pak zavedením substituce
$$\begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}$$
převedeme integrál $\int R(\sin x, \cos x) \, \mathrm{d}x$ na integrál z racionální funkce.
- Je-li $R(\sin x, \cos x)$ lichou funkcí vzhledem k $\sin x$, pak substituce
$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ \mathrm{d}t &= -\sin x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$
převede výpočet integrálu $\int R(\sin x, \cos x) \, \mathrm{d}x$ na integraci racionální funkce.
- Při integraci funkce tvaru $R(\operatorname{tg} x)$ použijeme substituci
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= t \\ x &= \operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}. \end{aligned}$$
Tím integrál $\int R(\operatorname{tg} x) \, \mathrm{d}x$ převedeme na integrál racionální funkce.

Příklad 1. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$.

Zvolíme substituci $t = \sin x$, potom $\mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$; $\sin^2 x = t^2$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x &= \int t^2(1-t^2) \, \mathrm{d}t \\ &= \int \left(t^2 - t^4\right) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + c \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c \end{aligned}$$

Příklad 2. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} \, \mathrm{d}x$ na intervalu $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Zavedeme substituci $t = \cos x$, odkud $\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$; $\cos^4 x = t^4$, $\sin^4 x = (1-t^2)^2$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{(1-t^2)^2(-\mathrm{d}t)}{t^4} \\ &= -\int \frac{1 - t^2 + t^4}{t^4} \, \mathrm{d}t \\ &= -\int (t^{-4} - 2t^{-2} + 1) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{t^{-3}}{3} - 2t^{-1} - t + c \\ &= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + c \end{aligned}$$

Příklad 3. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x \cos^2 x}$ pro $x \neq k\pi$ a $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.
Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$, potom $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$; $\sin^4 x = \frac{t^4}{(t^2+1)^2}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x \cos^2 x} &= \int \frac{(t^2+1)^2}{t^4}\,\mathrm{d}t \\
&= \int (1 + 2t^{-2} + t^{-4})\,\mathrm{d}t \\
&= t - 2t^{-1} - \frac{1}{3}t^{-3} + c \\
&= \operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + c
\end{aligned}$$

Integrace funkcí typu $\sin mx \cdot \sin nx$

Platí pro $m \pm n \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Při integrování těchto funkcí se využívají součtové vzorce

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Po odečtení druhé rovnice od první dostaneme

$$\frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2} = \sin\alpha\sin\beta.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\int (\sin mx \sin nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \cos x(m-n)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos x(m+n)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + c.
\end{aligned}$$

Příklad 4. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \sin x \sin 3x\,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int \sin x \sin 3x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\cos(x - 3x) - \cos(x + 3x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \cos(-2x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos(4x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4x}{4} + c \\
&= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + c
\end{aligned}$$

Integrace funkcí typu $\cos mx \cdot \cos nx$

Opět využijeme součtové vzorce, ale tentokrát rovnice sečteme a dostaneme

$$\frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2} = \cos\alpha\cos\beta.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\int (\cos mx \cos nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\cos(mx + nx) + \cos(mx - nx))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \cos x(m+n)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x(m-n)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + c.
\end{aligned}$$

Příklad 5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \cos 2x \cos 6x \,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int \cos 2x \cos 6x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(\cos(2x+6x) + \cos(2x-6x)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \cos(8x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos(-4x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 8x}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4x}{4} + c \\ &= \frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 4x}{8} + c\end{aligned}$$

Integrace funkcí typu $\sin mx \cdot \cos nx$

Zde využijeme vzorec

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)].$$

Potom

$$\begin{aligned}\int (\sin mx \cos nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(\sin(mx+nx) + \sin(mx-nx)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \sin x(m+n)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sin x(m-n)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(m-n)x}{m-n} + c.\end{aligned}$$

Příklad 6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int(\sin 5x \cos 3x)\,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int (\sin 5x \cos 3x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(\sin(5x+3x) + \sin(5x-3x)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \sin 8x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 8x}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{2} + c \\ &= -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + c\end{aligned}$$

Příklady k procvičení

Vypočtěte neurčité integrály:

- $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{-1}{\sin x} - \sin x + c\right]$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin^2 x}$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x) + c\right]$
- $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{\cos^2 x} + c\right]$
- $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos x + c\right]$