## Souvislost mezi určitým a neurčitým integrálem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{1}$$

## Integrační metoda per partes pro určité integrály

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$
$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Příklad 1.** Metodou per partes vypočtěte hodnotu určitého integrálu $\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

*Řešení*
Položíme $u = \ln(x+1)$, $v' = 1$ a dále počítáme podle vzorce 2.

$$\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln(x+1) & u' = \frac{1}{x+1} \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} = [x\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= (1\ln 2 - 0\ln 1) - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln 2 - \left( \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1\,\mathrm{d}x}{x+1} \right) =$$
$$= \ln 2 - \left( \int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \right) =$$
$$= \ln 2 - [x]_0^1 + [\ln(x+1)]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

**Příklad 2.** Metodou per partes vypočtěte hodnotu určitého integrálu $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

*Řešení*
V tomto případě položíme $u = \operatorname{arctg} x$, $v' = x$ a počítáme podle vzorce 2.

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left(\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\left( \int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \right) =$$
$$= \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2}[x - \operatorname{arctg} x]_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} =$$
$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Substituční metoda pro určité integrály**

Postup při integraci substitucí je stejný jako u neurčitého integrálu. Nesmíme pouze zapomenout provést substituci v mezích.

**Příklad 3.** Substituční metodou vypočtěte hodnotu určitého integrálu $\int\limits_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

<u>*Řešení*</u>
Protože $\frac{1}{x} = (\ln x)'$, použijeme substituci $\ln x = t$. Nové meze $t_1$ (dolní) a $t_2$ (horní) dostaneme dosazením původních mezí do rovnice $t = \ln x$.

$$\int\limits_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ t_1 = \ln \mathrm{e}^{-1} = -1 \\ t_2 = \ln \mathrm{e}^3 = 3 \end{array} \right| = \int\limits_{-1}^{3} (1+t)\,\mathrm{d}t = \left[ t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{3} =$$
$$= 3 + \frac{9}{2} - (-1 + \frac{1}{2}) = 3 + \frac{9}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 8.$$

**Příklad 4.** Substituční metodou vypočtěte hodnotu určitého integrálu $\int\limits_{4}^{8} \frac{x-1}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x$.

<u>*Řešení*</u>
Nejprve integrand upravíme, abychom mohli použít vzorec pro integraci primitivní funkce $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$:

$$\int\limits_{4}^{8} \frac{x-1}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{4}^{8} \frac{2x-2}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x$$

Nyní vypočteme primitivní funkci užitím substituce:

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x^2-2x-3 = t \\ (2x-2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x^2-2x-3| + c.$$

A vrátíme se zpět:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{4}^{8} \frac{2x-2}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\ln|x^2-2x-3|]_4^8 = \frac{1}{2}(\ln|64-16-3| - \ln|16-8-3|)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 45 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{45}{5} = \ln\sqrt{9} = \ln 3.$$

*Poznámka.* V příkladu 3 jsme přepočítali meze hned při použití substituce. V příkladu 4 jsme nejprve s použitím substituce našli primitivní funkci a vrátili se ze substituce zpět. Při řešení konkrétních příkladů volíme tu možnost, která je početně výhodnější.

# Příklady k procvičení s výsledky

1. Metodou per partes vypočtěte následující určité integrály:
   - $\int\limits_{0}^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{e}}{2}\right]$
   - $\int\limits_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$ $[\pi]$
   - $\int\limits_{0}^{2\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ $[4\pi]$

- $\int\limits_0^1 \arccos x \, \mathrm{d}x$ $[1]$

2. Substituční metodou vypočtěte následující určité integrály:

- $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}} \, \mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{6}\right]$
- $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \, \mathrm{d}x$ $\left[2 - \frac{\pi}{2}\right]$
- $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} \, \mathrm{d}x$ $\left[\frac{\pi^2}{4}\right]$
- $\int\limits_1^6 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{3x-2}}$ $\left[\frac{2}{3}\left(3 + \ln\frac{2}{5}\right)\right]$
- $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \, \mathrm{d}x$ $\left[1 - \frac{\pi}{4}\right]$

3. Vhodnou metodou vypočtěte následující určité integrály:

- $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} \, \mathrm{d}x$ $\left[\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right]$
- $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$ $\left[\ln\frac{3}{2}\right]$
- $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^4}{16} \, \mathrm{d}x$ $\left[\frac{3}{8}\ln 2 - \frac{225}{1024}\right]$