

## Integrace iracionálních funkcí

V některých případech lze vhodnými substitucemi integraci iracionálních funkcí převést na integraci racionálních funkcí.

### Integrace funkcí typu $R(x, \sqrt[n]{x})$

Symbol  $R$  značí racionální funkci dvou proměnných,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Při integrování funkcí tohoto typu použijeme substituci  $x = t^n$ , čímž převedeme integrál z iracionální funkce na integrál z funkce racionální.

**Příklad 1.** Vypočtěte neurčitý integrál  $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx$  na intervalu  $(0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 \cdot 6t^5 dt}{t^6(t^3 + t^2)} \\ &= 6 \int \frac{t^7 dt}{t^8(t+1)} \\ &= 6 \int \frac{dt}{t(t+1)} \\ &= 6 \int \left( \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \right) dt \\ &= 6 \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 6 (\ln |t| - \ln |t+1|) + c \\ &= 6 \ln \frac{|t|}{|t+1|} + c \\ &= 6 \ln \frac{|\sqrt[6]{x}|}{|\sqrt[6]{x} + 1|} + c \\ &= \ln \frac{|x|}{(\sqrt[6]{x} + 1)^6} + c \end{aligned}$$

### Integrace funkcí typu $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

$R$  značí racionální funkci dvou proměnných,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

Zahrnuje i integrály  $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx$ , (pro  $c = 0, d = 1$ ). Budeme předpokládat, že  $ad - bc \neq 0$ , v opačném případě, tedy kdyby platilo  $ad - bc = 0$ , byl by výraz pod odmocninou konstantní. Pomocí substituce  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$  tento integrál převedeme na integrál racionální funkce proměnné  $t$ , který počítat už umíme.

$$\begin{aligned} t^n &= \frac{ax+b}{cx+d} \\ t^n(cx+d) &= ax+b \\ ct^n x + t^n d &= ax+b \\ x(ct^n - a) &= b - t^n d \\ x &= \frac{b - t^n d}{ct^n - a} = Q(t) \dots \text{racionální funkce} \\ dx &= Q'(t) dt \end{aligned}$$

Nakonec

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} dx\right) = \int R(Q(t), t) Q'(t) dt,$$

kde  $R(Q(t), t) Q'(t)$  je racionální funkce.

**Příklad 2.** Vypočtete neurčitý integrál  $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}} dx$  na intervalu  $(-1, 0)$  a  $(0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} x+1 = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| \\ &= \int \frac{t^6-1}{t^3-t^2} 6t^5 dt \\ &= 6 \int (t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3) dt \\ &= 6 \left[ \frac{t^9}{9} + \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} \right] dt \\ &= 6 \left[ \frac{1}{9}(x+1)^{3/2} + \frac{1}{8}(x+1)^{4/3} + \frac{1}{7}(x+1)^{7/6} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6}(x+1) + \frac{1}{5}(x+1)^{5/6} + \frac{1}{4}(x+1)^{2/3} + c \right] \end{aligned}$$

**Příklad 3.** Vypočtete neurčitý integrál  $\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx$  na intervalu  $(-1, 0)$  a  $(0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| \\ &= \int \frac{2+t}{t^4-t} 2t dt \\ &= 2 \int \frac{t+2}{t^3-1} dt \\ &= 2 \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+t+1} \right) dt \\ &= 2 \ln|t-1| - \int \frac{2t+2}{t^2+t+1} dt \\ &= \ln(t-1)^2 - \ln(t^2+t+1) - \int \frac{dt}{t^2+t+1} \\ &= \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{2(t+1/2)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\ &= \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\ &= \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} + c \\ &= \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c \\ &= \ln \frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + c \end{aligned}$$

## Integrace funkcí typu $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Omezíme se pouze na případ, kdy  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ;  $ax^2 + bx + c$  nemá dvojnásobný kořen. Kdyby

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} |x - x_0|.$$

$\alpha)$  Nyní budeme předpokládat, že polynom  $ax^2 + bx + c$  má dva reálné kořeny  $x_1, x_2$ , kde  $x_1 < x_2$ .  
Potom

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Pro  $a > 0$  odmocnina existuje na intervalu  $(-\infty, x_1)$  a  $(x_2, \infty)$ . Na libovolném z těchto dvou intervalů platí:

$$\begin{aligned} \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} &= \sqrt{a(x - x_1)^2 \frac{x - x_2}{x - x_1}} \\ &= \sqrt{a} |x - x_1| \sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}} \end{aligned}$$

Provedeme substituci  $t = \sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}}$ , která vede na integrál z racionální funkce proměnné  $t$ . Potom

$$t^2 = \frac{x - x_2}{x - x_1}, \quad x = Q(t), \quad dx = Q'(t) dt.$$

Nakonec

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R(Q(t), |Q(t) - x_1| t) Q'(t) dt.$$

Pro  $a < 0$  odmocnina existuje na intervalu  $(x_1, x_2)$ . Na tomto intervalu platí:

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{-a(x - x_1)^2 \frac{x_2 - x}{x - x_1}} \\ &= \sqrt{-a} (x - x_1) \frac{x_2 - x}{x - x_1} \end{aligned}$$

Opět použijeme substituci  $\frac{x_2 - x}{x - x_1} = t^2$ .

$\beta)$  Nechť polynom  $ax^2 + bx + c$  nemá reálné kořeny. Odmocnina  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  je definována pro každé  $x \in \mathbb{R}$ ;  $a > 0$ ,  $c > 0$ . Metoda řešení těchto integrálů spočívá v tzv. Eulerových substitucích - nebudeme řešit.

## Příklady k procvičení

Vypočítejte neurčité integrály:

$$1. \int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx \quad [-x + 4\sqrt{x} - 4 \ln |\sqrt{x} + 1| + c]$$

$$2. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}} \quad \left[ 2 \frac{\sqrt{(x-2)(x-1)}}{x-1} + c \right]$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}} \quad [\ln |3 + \sqrt{x^2 + 6x + 5} + x| + c]$$

$$4. \int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} dx \quad \left[ \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}} \right| - \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{2} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \right) + c \right]$$