

Geometrické aplikace určitého integrálu

Užití integrálního počtu je velmi široké. Pomocí určitého integrálu lze spočítat obsahy rovinných útvarů, objemy a povrchy rotačních těles a délky rovinných křivek. Využití určitého integrálu je široké rovněž ve fyzice a fyzikální chemii. My si ukážeme geometrické využití.

Obsah rovinných obrazců

Definice 1. Nechtě $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Je-li $f(x)$ nezáporná funkce definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak množina $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ se nazývá **podgrafem** (subgrafem) funkce f .

Věta 1. Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná a integrovatelná, pak obsah S rovinného obrazce, který je podgrafem funkce $f(x)$, je dán vzorcem

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Důsledek 1. Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ funkce integrovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ a splňující nerovnost $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$, pak je zkoumaný rovinný obrazec $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ množinovým rozdílem pografu funkce f a podgrafu funkce g a pro jeho obsah platí

$$S = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx. \quad (2)$$

Při řešení úloh se můžeme dostat do situací, kdy integrovaná funkce $f(x)$ není v intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná (může nabývat nekladných hodnot). Pro příslušný integrál potom platí $\int_a^b f(x) dx \leq 0$. V takových případech počítáme obsah daného útvaru jako absolutní hodnotu příslušného určitého integrálu. Obsah tedy vypočteme podle vzorce

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

Samozřejmě existují také funkce, které nabývají na intervalu $\langle a, b \rangle$ jak kladných, tak záporných hodnot. V tomto případě si rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na jednotlivé intervaly, ve kterých funkce nabývá nezáporných, resp. nekladných hodnot, a příslušné integrály spočteme již podle známých vzorců 1, 2 a 3.

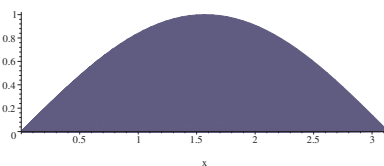
Poznámka. Pokud pro některá $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) < 0$, zapíšeme: $g(x) - f(x) = (g(x) + c) - (f(x) + c)$, kde c zvolíme tak, aby $f(x) + c > 0$ pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$. Posunutím obrazce se daný obsah nezmění: $\int_a^b ((g(x) + c) - (f(x) + c)) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$.

Řešené příklady

Příklad 1. Vypočtete obsah podgrafu funkce $y = \sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení

Pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$ je $f(x) = \sin x \geq 0$.



Pro obsah daného útvaru platí

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2j^2.$$

Poznámka. Výpočet obsahu složitějších obrazců provádíme tak, že daný obrazec nejprve rozdělíme na několik částí, jejichž obsahy už lze počítat podle předchozích pravidel.

Příklad 2. Vypočtete plošný obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jejími tečnami s body dotyku $T_1 = [1, 3]$, $T_2 = [4, 0]$.

Řešení

Nejprve upravíme rovnici paraboly tak, abychom získali souřadnice vrcholu paraboly a její parametr:

$$\begin{aligned}y &= (x - 3)^2 + 8 - 9 \\y &= (x - 3)^2 - 1 \\(x - 3)^2 &= y + 1.\end{aligned}$$

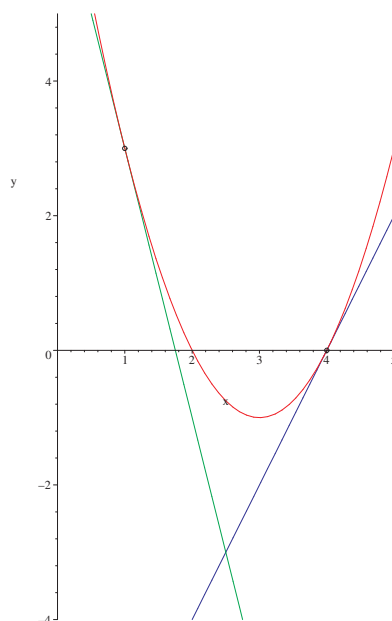
Z poslední rovnice můžeme vyčíst, že parabola má vrchol $V = [3, -1]$ a její parametr je $p = \frac{1}{2}$. Nyní nám zbývá najít rovnice tečen. Dosadíme do známého vztahu pro rovnice tečen paraboly t : $(x - m)(x_t - m) = p(y + y_t - 2n)$, kde $[m, n]$ jsou souřadnice vrcholu a $[x_t, y_t]$ jsou souřadnice bodu dotyku. Potom dostáváme rovnice tečen:

$$\begin{aligned}t_1 : (x - 3)(1 - 3) &= \frac{1}{2}(y + 3 + 2) \\t_2 : (x - 3)(4 - 3) &= \frac{1}{2}(y + 0 + 2),\end{aligned}$$

které upravíme:

$$\begin{aligned}t_1 : -2x + 6 &= \frac{1}{2}(y + 5) & t_2 : x - 3 &= \frac{1}{2}(y + 2) \\4x - 12 &= -y - 5 & 2x - 6 &= y + 2 \\y &= -4x + 7 & y &= 2x - 8.\end{aligned}$$

Nyní se podíváme, jak vypadají grafy funkcí:



Z obrázku vidíme, že výpočet obsahu bude složitější. Zřejmě budeme muset najít průsečík tečen a potom spočítat obsahy jednotlivých částí obrazce, jež nám vymeze tečny a parabola.

$$\begin{aligned}-4x + 7 &= 2x - 8 \\-6x &= -15 \\x &= \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \\y &= 2x - 8 = 2 \cdot \frac{5}{2} - 8 = -3\end{aligned}$$

Průsečík tečen je tedy bod $[\frac{5}{2}, -3]$. Obsah S spočteme jako součet obsahů S_1, S_2 , kde S_1 je obsah obrazce, který je vymezen parabolou a tečnou t_1 na intervalu $\langle 1, \frac{5}{2} \rangle$, a S_2 je obsah obrazce vymezeného parabolou a tečnou t_2 na intervalu $\langle \frac{5}{2}, 4 \rangle$:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_1^{\frac{5}{2}} ((x^2 - 6x + 8) - (-4x + 7)) \, dx = \int_1^{\frac{5}{2}} (x^2 - 6x + 8 + 4x - 7) \, dx = \\
 &= \int_1^{\frac{5}{2}} (x^2 - 2x + 1) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_1^{\frac{5}{2}} = \\
 &= \frac{125}{24} - \frac{25}{4} + \frac{5}{2} - \frac{1}{3} + 1 - 1 = \frac{125 - 150 + 60 - 8}{24} = \frac{27}{4} j^2 \\
 S_2 &= \int_{\frac{5}{2}}^4 ((x^2 - 6x + 8) - (2x - 8)) \, dx = \int_{\frac{5}{2}}^4 (x^2 - 6x + 8 - 2x + 8) \, dx = \\
 &= \int_{\frac{5}{2}}^4 (x^2 - 8x + 16) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 16x \right]_{\frac{5}{2}}^4 = \\
 &= \frac{4^3}{3} - 4^3 + 64 - \left(\frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} \right)^3 - 4 \left(\frac{5}{2} \right)^2 + 16 \frac{5}{2} \right) = \\
 &= \frac{64}{3} - \frac{128}{2} + 64 - \frac{125}{24} + 25 - 40 = \frac{512 - 125 - 360}{24} = \frac{27}{24} j^2 \\
 S &= S_1 + S_2 = \frac{27}{24} + \frac{27}{24} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} j^2.
 \end{aligned}$$

Obsah rovinného obrazce vymezeného křivkou popsanou parametrickými rovnicemi

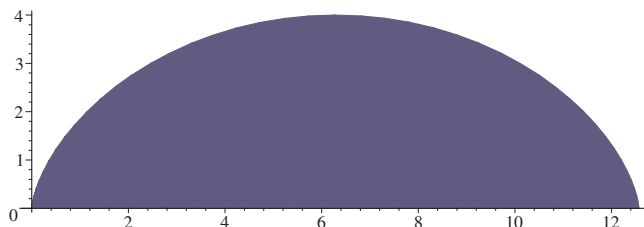
Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kde funkce ψ je spojitá a nezáporná v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a funkce φ má v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ derivaci $\varphi'(t)$ různou od nuly, která je integrovatelná v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, platí pro obsah obrazce ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ vzorec

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) \, dt \right|. \quad (4)$$

Příklad 3. Vypočtěte obsah cykloidy, jež je zadána parametrickými rovnicemi $\varphi(t) = a(t - \sin t), \psi(t) = a(1 - \cos t), a > 0$ pro $0 \leq t \leq 2\pi$.

Řešení

Uděláme si o křivce představu:



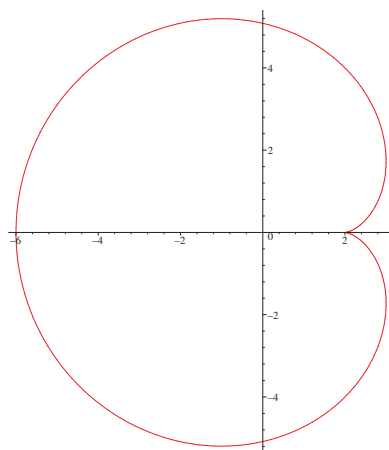
Abychom mohli spočítat obsah podle vzorce 4, musíme nejprve spočítat derivaci $\varphi' = a(1 - \cos t)$. A

nyňi jiř můžeme do vzorce 4 dosadit a obsah spočítat:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\
 &= a^2 \left([t - 2 \sin t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \right) = a^2 \left((2\pi - 2 \sin 2\pi) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt \right) = \\
 &= a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} \right) = a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{1}{2} \sin 4\pi \right) \right) = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2 j^2.
 \end{aligned}$$

Příklad 4. Vypočtete obsah obrazce ohraničeného křivkou $x(t) = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y(t) = a(2 \sin t - \sin 2t)$, $a > 0$.

Podíváme se na graf křivky:



Vidíme, že křivka je souměrná podle osy x , spočítáme tedy její obsah jako dvojnásobek obsahu pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Nejprve musíme najít derivaci $x'(t) = a(-2 \sin t + 2 \sin 2t)$ a nyňi jiř můžeme dosadit do vzorce 4:

$$\begin{aligned}
 \frac{S}{2} &= \left| \int_0^{\pi} a(-2 \sin t + 2 \sin 2t)a(2 \sin t - \sin 2t) dt \right| = \\
 &= a^2 \left| \int_0^{\pi} (-4 \sin^2 t + 2 \sin t \sin 2t + 2 \sin 2t \sin t - 2(\sin 2t)^2) dt \right| = \\
 &= a^2 \left| \int_0^{\pi} (-4 \sin^2 t + 4 \sin 2t \sin t - 2 \sin^2 2t) dt \right| = \\
 &= \left| -4a^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + 4a^2 \int_0^{\pi} \sin 2t \sin t dt - 2a^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \right| = \\
 &= \left| -2a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt - a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos 4t) dt + 4a^2 \int_0^{\pi} 2 \sin t \cos t \sin t dt \right| = \\
 &= \left| -2a^2 \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} - a^2 \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\pi} + 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos t dt \right|.
 \end{aligned}$$

Nyní si zvlášť vyřešíme poslední integrál, použijeme k tomu substituci $\sin t = u$:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 t \cos t \, dt &= \left| \begin{array}{l} \sin t = u \\ \cos t \, dt = du \end{array} \right| = \int u^2 \, du = \\ &= \left[\frac{u^3}{3} \right] = \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right] = \\ 8a^2 \int_0^\pi \sin^2 t \cos t \, dt &= 8a^2 \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Budeme pokračovat ve výpočtu obsahu

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= |-2a^2(\pi - 0) - a^2(\pi - 0) + 0| = |-3\pi a^2| = 3\pi a^2 j^2 \\ S &= 6\pi a^2 j^2. \end{aligned}$$

Délka křivky

Křivka v kartézských souřadnicích

Věta 2. Je-li funkce $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spolu s funkcí f' na $\langle a, b \rangle$ spojitá, pak graf funkce f je křivka s konečnou délkou danou vzorcem

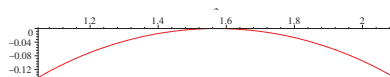
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx. \quad (5)$$

Poznámka. Tento vzorec je možné použít i v případě, kdy funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a derivace je spojitá na intervalu (a, b) .

Příklad 5. Vypočítejte délku oblouku křivky $y = \ln \sin x$ na intervalu $\langle \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \rangle$.

Řešení

Graf funkce $y = \ln \sin x$ pro $x \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \rangle$ vypadá takto:



Nejprve funkci zderivujeme:

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Délku l vypočteme dosazením do vzorce 5:

$$\begin{aligned} l &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2} \, dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} \, dx = \\ &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} \, dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x}. \end{aligned}$$

Použijeme substituci $\cos x = t$. Abychom do integrálu dostali $\cos x$, provedeme několik úprav. Nejprve zlomek rozšíříme výrazem $\sin x$ a poté upravíme:

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\sin x}{\sin^2 x} \, dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} \, dx.$$

Při dosazení substituce potřebujeme najít nové meze:

$$\begin{cases} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ t_1 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_{1/2}^{-1/2} \frac{-dt}{1-t^2} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{(1-t)(1+t)}$$

Nyní se budeme věnovat výpočtu integrálu a osvěžíme si rozklad racionální funkce na parciální zlomky.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)(1+t)} &= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} & 0 &= A - B \\ 1 &= A(1+t) + B(1-t) & 1 &= A + B \\ & & A &= \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dostáváme se k vyřešení integrálu:

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{1-t^2} &= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2} [-\ln(1-t) + \ln(1+t)]_{-1/2}^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} (-\ln 3) = \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 = \ln 3. \end{aligned}$$

Křivka zadána parametrickými rovnicemi

Nechť je nyní rovinná křivka vyjádřena parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Jsou-li funkce φ' , ψ' spojité na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, potom délka l oblouku křivky zadané parametrickými rovnicemi je mezi body α a β dána vzorcem

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \, dt. \quad (6)$$

Poznámka. Podobně můžeme zavést vzorec pro výpočet délky oblouku prostorové křivky, jež je zadána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Potom dostáváme vzorec

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} \, dt. \quad (7)$$

Příklad 6. Vypočtěte délku oblouku křivky, jež je zadána parametrickými rovnicemi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ pro $0 \leq t \leq 2\pi$.

Řešení

Nejprve budeme derivovat: $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a \sin t$. Nyní můžeme dosadit do vzorce 6:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt. \end{aligned}$$

Integrand rozšíříme výrazem $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, tak dostaneme

$$= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt$$

a nyní použijeme substituci $\frac{t}{2} = u$, přepočítáme meze a nakonec dosadíme:

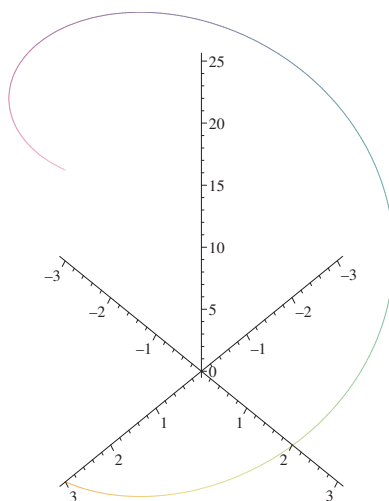
$$\begin{aligned} &= \left| \begin{array}{l} \frac{t}{2} = u \\ \frac{1}{2} dt = du \\ u_1 = \frac{0}{2} = 0 \\ u_2 = (\frac{1}{2})2\pi = \pi \end{array} \right| = 2a \int_0^{\pi} \sin u \, du = 4a \int_0^{\pi} \sin u \, du = \\ &= 4a [-\cos u]_0^{\pi} = 4a(1 + 1) = 8aj. \end{aligned}$$

Poznámka. Křivka, jejíž délku jsme počítali v příkladu 6, se nazývá **cykloida**. Tato křivka je opisována bodem P , který leží na kružnici o poloměru a a tato kružnice se kotálí po přímce.

Příklad 7. Vypočtete délku oblouku prostorové křivky, jež je zadána parametrickými rovnicemi $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $a, b > 0$ pro $t \in (0, 2\pi)$.

Řešení

Podíváme se na graf křivky:



Jedná se o jeden závit šroubovice. Abychom mohli spočítat délku závitu, potřebujeme znát derivace:

$$\begin{aligned} x' &= -a \sin t \\ y' &= a \cos t \\ z' &= b. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme spočítat délku jednoho závitu podle vzorce 7:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} [t]_0^{2\pi} = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2} j. \end{aligned}$$

Objem rotačních těles

Věta 3. *Nechť je dána spojitá nezáporná funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť T je těleso v \mathbb{R}^3 , které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x . Potom objem tělesa T je dán vzorcem*

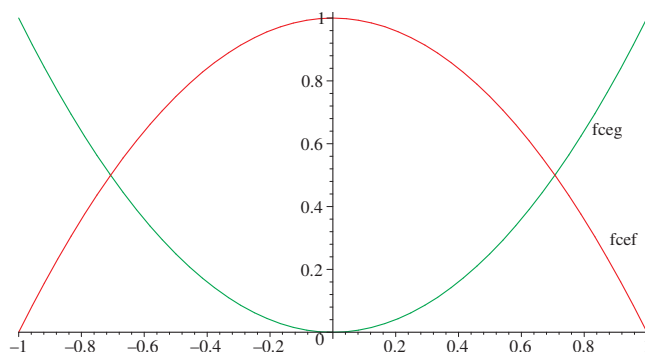
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (8)$$

Řešené příklady

Příklad 8. Vypočtěte objem rotačního tělesa, jež vznikne rotací obrazce omezeného křivkami $f: y = 1 - x^2$ a $g: y = x^2$ kolem osy x .

Řešení

Nejprve nakreslíme grafy obou funkcí



a určíme průsečíky grafů funkcí. Jejich x -ové souřadnice získáme jako řešení rovnice $f(x) = g(x)$, tj:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= x^2 \\ 1 &= 2x^2 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Rovnice $f(x) = g(x)$ má dvě řešení: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Na intervalu $\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$ je horní funkcí $h(x) = 1 - x^2$ a dolní funkcí $d(x) = x^2$. Objem rotačního tělesa vyjádříme jako $V = \pi \int_a^b (h^2(x) - d^2(x)) dx$.

Dosadíme a upravíme:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} ((1-x^2)^2 - x^4) dx = \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2 + x^4 - x^4) dx = \\
 &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2) dx = \pi \left[x - 2\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\
 &= \pi \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{2}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right] = \\
 &= \pi\sqrt{2} - \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} \right) = \pi\sqrt{2} - \pi \frac{\sqrt{2}}{3} = \\
 &= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{3} \pi = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi j^3.
 \end{aligned}$$

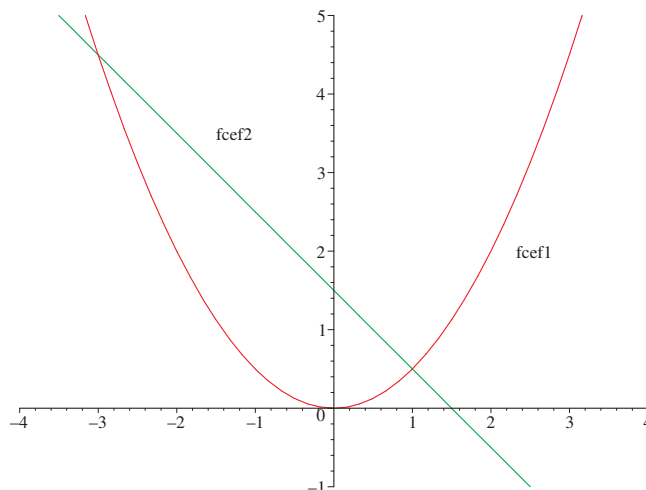
Příklad 9. Vypočítejte objem rotačního tělesa vytvořeného rotací obrazce ohraničeného křivkami $2y = x^2$ a $2x + 2y - 3 = 0$ kolem osy x .

Řešení

Vypočteme průsečíky grafů dvou funkcí: $f_1: y = \frac{x^2}{2}$, $f_2: y = \frac{3}{2} - x$.

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{2} &= \frac{3}{2} - x \\
 x^2 + 2x - 3 &= 0 \\
 (x-1)(x+3) &= 0 \\
 x_1 &= -3, \quad x_2 = 1
 \end{aligned}$$

Nyní nakreslíme grafy obou funkcí, z grafů určíme, která funkce je větší a určíme objem stejně jako v příkladu 8:

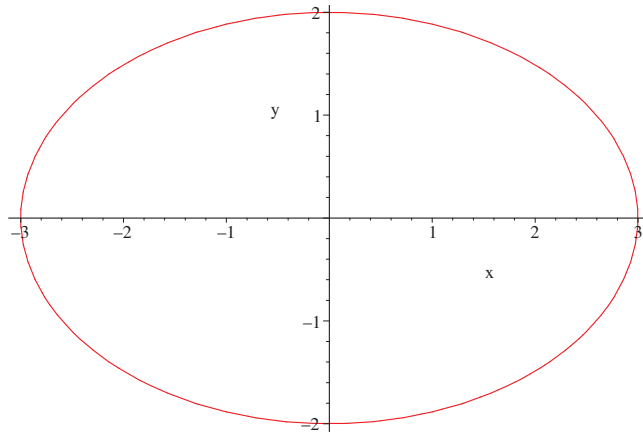


$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{DM}^{HM} (f_2^2(x) - f_1^2(x)) \, dx = \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{3}{2} - x \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \, dx = \\
&= \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{9}{4} - 3x + x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \, dx = \\
&= \pi \left[\frac{9}{4}x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{20} \right]_{-3}^1 = \\
&= \pi \left[\frac{9}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{20} - \left(-\frac{27}{4} - \frac{27}{2} - \frac{27}{3} + \frac{243}{20} \right) \right] = \\
&= \pi \frac{544}{30} = \frac{272\pi}{15} j^3.
\end{aligned}$$

Příklad 10. Vypočítejte objem rotačního tělesa vytvořeného rotací obrazce ohraničeného křivkou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$ kolem osy x .

Řešení

Nejprve je potřebné udělat si o křivce jasnou představu. K tomu nám pomůže její graf (vykreslený pro přesné hodnoty $a = 3$, $b = 2$):



Z grafu je vidět, že křivka je souměrná podle osy y a protíná osu x v bodech $3, -3$, tedy obecně v bodech $-a, a$. V prvním kvadrantu má křivka rovnici $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Můžeme tedy objem tělesa vypočítat jako dvojnásobek objemu tělesa vzniklého rotací obrazce ohraničeného osou x a grafem funkce $f: y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $x \in \langle 0, a \rangle$ kolem osy x .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}V &= \pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \, dx = \pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \, dx = \\
&= \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a = \pi b^2 \left(a - \frac{a^3}{3a^2} \right) = \frac{2}{3}\pi ab^2 \\
V &= \frac{4}{3}\pi ab^2 j^3.
\end{aligned}$$

Poznámka. Je-li graf funkce f určen parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, platí pro objem tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem spojitě nezáporné funkce f kolem osy x vztah

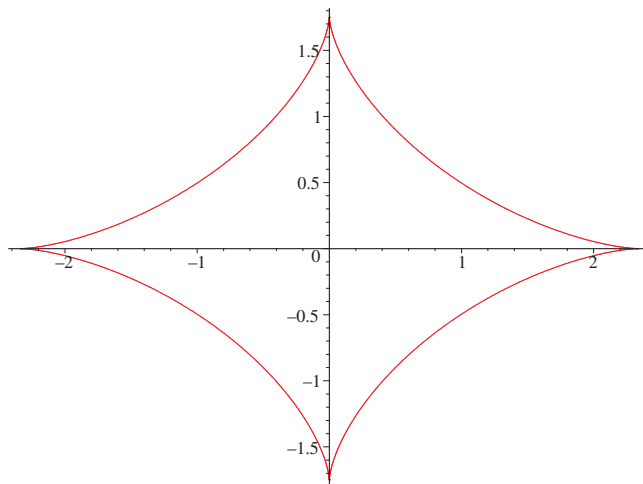
$$V = \pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) \, dt \right|, \quad (9)$$

přičemž $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Příklad 11. Vypočítejte objem tělesa vytvořeného otáčením obrazce ohraničeného křivkou $x = a \sin^3(t)$, $y = b \cos^3(t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ okolo osy x ($a > 0$, $b > 0$).

Řešení

Podíváme se, jak vypadá graf funkce pro pevné hodnoty $a = 3$, $b = 2$.



Křivka je souměrná podle osy y , vzniklé těleso je souměrné podle roviny $x = 0$. Můžeme proto spočítat objem poloviny tělesa dosazením do vzorce 9 takto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V &= \pi \int_0^{\pi/2} b^2 \cos^6(t) 3a \sin^2(t) \cos t \, dt = 3ab^2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^7(t) \, dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin t = u \\ \cos t \, dt = du \\ u_1 = \sin 0 = 0 \\ u_2 = \sin \pi/2 = 1 \end{array} \right| = 3ab^2\pi \int_0^1 u^2 (1-u^2)^3 \, du = \\ &= 3ab^2\pi \int_0^1 u^2 (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) \, du = \\ &= 3ab^2\pi \int_0^1 (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8) \, du = \\ &= 3ab^2\pi \left[\frac{u^3}{3} - \frac{3u^5}{5} + \frac{3u^7}{7} - \frac{u^9}{9} \right]_0^1 = 3ab^2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = \\ &= 3ab^2\pi \frac{105 - 189 + 135 - 35}{315} = 3ab^2\pi \frac{16}{315} = ab^2\pi \frac{16}{105} \\ V &= \frac{32}{105} ab^2\pi j^3. \end{aligned}$$

Povrch pláště rotačního tělesa

1. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v tomto intervalu spojitou derivaci. Povrch pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky, jež je grafem funkce f , kolem osy x , lze vypočítat takto:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx. \quad (10)$$

2. Jestliže je křivka vyjádřena parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a funkce

φ, ψ mají v uvedeném intervalu spojité derivace, pro povrch pláště rotačního tělesa platí:

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (11)$$

Řešené příklady

Příklad 12. Vypočítejte povrch plochy, kterou vytvoří křivka $y = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ otáčením okolo osy x .

Řešení

K výpočtu povrchu vzniklého tělesa potřebujeme derivaci: $y' = \cos x$. Nyní můžeme dosadit do vzorce 10:

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 2\pi \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} \sin x dx.$$

Integrál vyřešíme použitím substituce:

$$\left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ DM : \cos 0 = t, t = 1 \\ HM : \cos \pi = t, t = -1 \end{array} \right| = 2\pi \int_1^{-1} -\sqrt{1+t^2} dt.$$

Nyní přehodíme meze a podle věty tedy platí:

$$2\pi \int_1^{-1} -\sqrt{1+t^2} dt = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} dt$$

Vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ sudá, můžeme podle věty o sudosti funkce tento integrál spočítat takto:

$$2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} dt = 2 \cdot 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt$$

Předcházející integrál vypočítáme zvlášť následovně: nejprve integrovaný výraz rozšíříme výrazem $\sqrt{1+t^2}$, vzniklý integrál rozdělíme na dva, přičemž ten druhý vyřešíme metodou per partes:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int_0^1 t \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = t \quad u' = 1 \\ v' = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad v = \sqrt{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \left[\ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| \right]_0^1 + \left[t\sqrt{1+t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt \\ 2 \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt &= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 + \sqrt{2} \\ 2 \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt &= \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} \\ \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} (\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Konečný povrch tedy je:

$$P = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = 4\pi \frac{1}{2} (\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}) = 2\pi (\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}) j^2.$$

Příklad 13. Vypočtěte povrch plochy vytvořené otáčením oblouku křivky $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$ kolem osy x .

Řešení

Budeme potřebovat derivace: $x' = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t$ a $y' = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t$. Nyní můžeme dosadit do vzorce 11 a povrch spočítat:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^\pi a(\sin t - t \cos t) \sqrt{a^2 t^2 \cos^2 t + a^2 t^2 \sin^2 t} dt = \\ &= 2\pi \int_0^\pi a(\sin t - t \cos t) at \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= 2\pi a^2 \int_0^\pi t(\sin t - t \cos t) dt = 2\pi a^2 \left(\int_0^\pi t \sin t dt - \int_0^\pi t^2 \cos t dt \right). \end{aligned}$$

Oba integrály spočítáme zvlášť metodou per partes:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t \sin t \, dt &= \left| \begin{array}{l} u = t \quad u' = 1 \\ v' = \sin t \quad v = -\cos t \end{array} \right| = [-t \cos t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t \, dt = \\ &= -\pi \cos \pi + [\sin t]_0^{\pi} = \pi \\ \int_0^{\pi} t^2 \cos t \, dt &= \left| \begin{array}{l} u = t^2 \quad u' = 2t \\ v' = \cos t \quad v = \sin t \end{array} \right| = [t^2 \sin t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t \sin t \, dt = \\ &= \pi^2 \sin \pi - 2 \int_0^{\pi} t \sin t \, dt = -2\pi. \end{aligned}$$

Nyní můžeme naše dosažené výsledky dosadit a spočítat povrch:

$$P = 2\pi a^2 \left(\int_0^{\pi} t \sin t \, dt - \int_0^{\pi} t^2 \cos t \, dt \right) = 2\pi a^2 (\pi + 2\pi) = 6\pi^2 a^2 j^2.$$

Příklady k procvičení s výsledky

1. Vypočtěte obsah rovinného obrazce, který je omezen křivkami:

• $y = x^2, x + y = 2$ $[S = \frac{9}{2}]$

• $y = 2^x, y = 2, x = 0$ $[S = 2 - \frac{1}{\ln 2}]$

• $y = e^{-2x} - 1, y = e^{-x} + 1, x = 0$ $[S = \ln 4 - \frac{1}{2}]$

• $y = \operatorname{tg} x, y = \frac{2}{3} \cos x, x = 0$ $[S = \frac{1}{3} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2}]$

• zadaných parametricky
 $x = a(\cos t + t \sin t), y = (\sin t - t \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi)$ a $x = a, y \leq 0$ $[S = \frac{a^2}{3}(4\pi^2 + 3\pi)]$

• zadaných parametricky
 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0$ $[S = \frac{3}{8}\pi a^2]$

• zadaných parametricky
 $x = 3t^2, y = 3t - t^3$ $[S = \frac{72\sqrt{3}}{5}]$

2. Vypočtěte délku oblouku křivky:

• $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} x \in \langle -1, 2 \rangle$ $[l = \frac{1}{2}(e^2 + e - e^{-2} - e^{-1})]$

• $y = \ln(1 - x^2), x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ $[l = \ln 3 - \frac{1}{2}]$

• $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ mezi průsečíky s osou x $[l = 2\sqrt{3}]$

• $y = \ln \cos x, x \in \langle 0, a \rangle, 0 < a < \frac{\pi}{2}$ $[l = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}]$

3. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami:

• $x^4 + y^4 = a^2 x^2, a > 0$ kolem osy x $[V = \frac{2\pi a^3}{3}]$

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kolem osy x [$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$]

- $y = x, y = x + \sin^2 x, x \in \langle 0, \pi \rangle$ kolem osy y [$V = \frac{\pi^3}{2}$].

4. Vypočtete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkou:

- $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t, t \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x kolem osy x [$V = \frac{2\pi}{15}$]

- $x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}, t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$ kolem osy x [$V = \frac{3\pi}{4}$]

5. Vypočtete povrch pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného horní polovinou asteroidy o parametrických rovnicích $x = \varphi(t) = a \cos^3 t, y = \psi(t) = a \sin^3 t, t \in \langle 0, \pi \rangle$ a osou x . [$P = \frac{12}{5}\pi a^2$]