

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

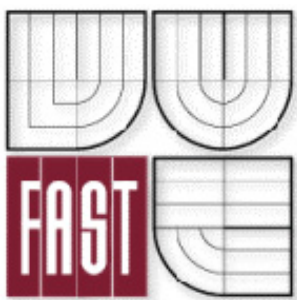
FAKULTA STAVEBNÍ

---

# MATEMATIKA

Příklady aplikací vysokoškolské matematiky ve výuce  
předmětů specializací na FAST

Řešitelé projektu FRVŠ 808/2009/F1/a  
FAST VUT v Brně



DOPLŇKOVÝ STUDIJNÍ TEXT  
PRO STUDENTY FAKULTY STAVEBNÍ

---





# Obsah

Úvod	4
<b>1 Elementární příklady</b>	<b>7</b>
<b>2 Komplexní příklady</b>	<b>15</b>
2.1 Eulerova vzpěrná pevnost . . . . .	15
2.2 Nosník na Winklerově podloží . . . . .	17
2.3 Kirchhoffova rotačně symetrická deska . . . . .	20
2.4 Fourierova analýza vedení tepla stěnou . . . . .	23
2.5 Bredtovy vzorce pro kroucení prutu . . . . .	26
2.6 Boussinesqovo pružné podloží . . . . .	28
2.7 Objem a těžiště tlačené plochy betonu . . . . .	30
2.8 Optimalizace betonové směsi podle Féreta . . . . .	37
2.9 Vlastní kmitání stožáru . . . . .	40
2.10 Přechodnicový oblouk v trase komunikace . . . . .	45
2.11 Výtok otvorem ve svislé stěně . . . . .	49
2.12 Harmonický oscilátor . . . . .	52
2.12.1 Volné harmonické kmity . . . . .	52
2.12.2 Tlumené kmity . . . . .	55
2.12.3 Nucené kmity . . . . .	56
<b>Doporučená literatura</b>	<b>59</b>

---



# Úvod

S přechodem na bakalářské studium došlo k mnoha změnám. Byly akreditovány nové studijní programy pro bakalářské a pro navazující magisterské studium. Pokud jde o matematiku, tak se na naší fakultě vcelku podařilo zachovat obsah předchozího studia, došlo však k jeho časovému přerozdělení. Problematika pravděpodobnosti a matematické statistiky se dostala do třetího ročníku studia, numerická matematika do prvního ročníku navazujícího magisterského studia.

V souvislosti s bakalářským studiem, které umožňuje studentům získat nižší vysokoškolské vzdělání, vznikají problémy s odpovídající náročností výkladu přednášené látky a s úrovní požadavků kladených na studenty ve srovnání s předchozím inženýrským studiem. To také souvisí s mírou využívání matematických poznatků při zdůvodňování výsledků přednášených partií jednotlivých specializací, na které již zbývá méně času a pro bakaláře se jeví jako příliš obtížné. Přitom bakalářské studium je čtyřleté a většina studentů zpravidla pokračuje v navazujícím třímestrovém magisterském studiu. Absolvent navazujícího magisterského studia by měl být schopen číst i odbornou knižní a časopiseckou literaturu svého zaměření, která se již matematice nevyhýbá.

Je proto jistě dobré upozorňovat studenty bakalářského studia na úlohy předmětů specializací, které využívají poznatky přednášené v matematice. Tím je možné alespoň u části studentů vzbudit větší zájem o přednášenou látku a dosáhnout přesvědčení o její užitečnosti.

A k tomu by měla přispět i tato sbírka. Jde pouze o její první variantu. Bylo by vhodné ji dále rozšiřovat, aby postupně obsahovala více matematických partií ve vícero oborech specializací vyučovaných na stavební fakultě.

Je naší milou povinností poděkovat všem kolegům z ostatních ústavů, kteří nám byli jakkoliv nápomocni při sestavování této sbírky.

Kolektiv autorů  
prosinec 2009

---



# Kapitola 1

## Elementární příklady

**Příklad 1** ([7], s. 9) *O kolik se prodlouží vlastní svíslá tyč dlouhá 3,2 m, je-li upevněná na horním konci?* (Modul pružnosti tahu v oceli je  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ , hustota  $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\Delta l = \int_0^l \frac{\rho g}{E} \cdot (l - y) dy$ .)



Řešení:

$$\begin{aligned}\Delta l &= \int_0^l \frac{\rho g}{E} \cdot (l - y) dy = \frac{\rho g}{E} \left[ ly - \frac{y^2}{2} \right]_0^l = \frac{\rho g}{E} \cdot \frac{l^2}{2} = \\ &= \frac{7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (3,2 \text{ m})^2}{2 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \cdot 2} = 1,96 \cdot 10^{-6} \text{ m}\end{aligned}$$

**Příklad 2** ([7], s. 36) *Dřevěný válec ponořený ve vodě do 2/3 výšky vytáhneme z vody. Jakou práci vykonáme? Poloměr válce je 10 cm, výška válce je 60 cm, hustota dřeva je  $\rho_D = 600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Předpokládáme, že hladina vody v nádobě se nemění.*



Řešení: Celková práce při vytažení o 2/3 výšky je dána vzorcem

$$W = \int_0^{\frac{2}{3}h} (\pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \rho_D \cdot g - \pi \cdot r^2 \cdot y \cdot \rho_V \cdot g) dy = \pi r^2 g \int_0^{\frac{2}{3}h} (h \cdot \rho_D - y \cdot \rho_V) dy.$$

Proto

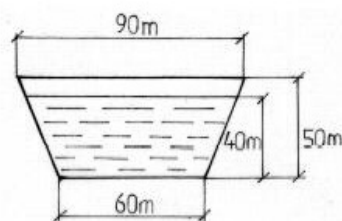
$$\begin{aligned}W &= \pi r^2 g \left[ h \rho_D y - \frac{y^2}{2} \rho_V \right]_0^{\frac{2}{3}h} = \pi r^2 g \left( \frac{2}{3} h^2 \rho_D - \frac{4}{18} h^2 \rho_V \right) = \frac{2}{3} \pi r^2 g h^2 (\rho_D - \frac{1}{3} \rho_V) \\ &= \frac{2}{3} \pi (0,1 \text{ m})^2 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (0,6 \text{ m})^2 (600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} - \frac{1}{3} 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}) = 19,7 \text{ J}.\end{aligned}$$

**Příklad 3** ([7], s. 38, modifikováno) *Jak velkou silou působí voda na hráz údolní přehrady, která má tvar lichoběžníku (viz obrázky)?*

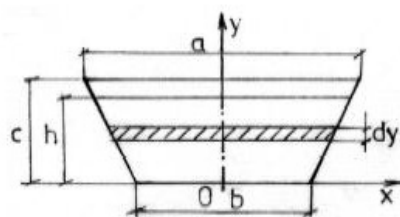




$$(F = \int_0^h \left( \frac{a-b}{2c}y + \frac{b}{2} \right) y \rho g dy.)$$



Hráz údolní nádrže



Označení rozměrů hráze

Řešení:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^h \left( \frac{a-b}{2c}y + \frac{b}{2} \right) y \rho g dy = \\ &= \rho g \frac{a-b}{2c} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^h + \rho g \frac{b}{2} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{1}{2} \rho g h^2 \left[ \frac{a-b}{3c} h + \frac{b}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (40 \text{ m})^2 \left[ \frac{90 \text{ m} - 60 \text{ m}}{3 \cdot 50 \text{ m}} \cdot 40 \text{ m} + \frac{60 \text{ m}}{2} \right] = 2,98 \cdot 10^8 \text{ N}. \end{aligned}$$



**Příklad 4** ([8], s. 8, modifikováno) *Vypočítejte rychlost a zrychlení pohybu hmotného bodu, který je popsán rovnicí*

$$s(t) = (0,06 \text{ m}) \cdot \cos \left( (1,5\pi \text{ s}^{-1})t + \frac{2}{3}\pi \right).$$

Řešení: Rychlost hmotného bodu vypočteme derivací výchylky podle času

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t) = -(0,06 \text{ m})(1,5\pi \text{ s}^{-1}) \cdot \sin \left( (1,5\pi \text{ s}^{-1})t + \frac{2}{3}\pi \right),$$

$$v(t) = -(0,09\pi \text{ m s}^{-1}) \cdot \sin \left( (1,5\pi \text{ s}^{-1})t + \frac{2}{3}\pi \right)$$

a zrychlení derivací rychlosti

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = v'(t) = -(0,09\pi \text{ m s}^{-1})(1,5\pi \text{ s}^{-1}) \cdot \cos \left( (1,5\pi \text{ s}^{-1})t + \frac{2}{3}\pi \right),$$

$$a(t) = -(0,135\pi^2 \text{ m s}^{-2}) \cdot \cos \left( (1,5\pi \text{ s}^{-1})t + \frac{2}{3}\pi \right).$$

**Příklad 5** ([8], s. 46) *Nalezněte tvar vlnové rovnice, jejímž řešením je rovinná vlna, která se šíří ve směru osy  $x$  dle rovnice*



$$u = u(x, t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi).$$

**Řešení:** Vypočteme parciální derivace funkce  $u$  podle jednotlivých proměnných

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= U \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi), \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= -U \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) = -\omega^2 \cdot u(x, t), \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= -U \cdot k \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi), \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= -U \cdot k^2 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) = -k^2 \cdot u(x, t). \end{aligned}$$

Vyjádřením výchylky  $u$  z druhé parciální derivace dle času  $t$  a dosazením do druhé parciální derivace dle polohy  $x$  dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

kde vztahem  $c = \omega/k$  je dána fázová rychlost  $c$ . Výsledná rovnice je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

**Příklad 6** ([9], s. 53) *Plnění a prázdnění prizmatické nádoby otvorem při  $Q_p = \text{konst.}$*



**Řešení:** Má-li nádoba stálý průřez  $A_z = \text{konst.}$  (válec, hranol, ...), můžeme zapsat pro čas nutný ke změně polohy hladiny z úrovně  $z_1$  na  $z_2$

$$t = A_z \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{Q_p - \mu A \sqrt{2gz}}, \quad (1.1)$$

kde přítok  $Q_p$  můžeme vyjádřit pomocí plochy výtokového otvoru  $A$  a mezní hladiny  $z_u$ , na které by se hladina ustálila, pokud by přítok byl roven výtoku:

$$Q_p = \mu A \sqrt{2gz_u},$$

kde  $A$  je plocha výtokového otvoru a  $\mu$  součinitel výtoku. Dosazením tohoto vztahu do integrálu (1.1) obdržíme:

$$t = A_z \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\mu A \sqrt{2gz_u} - \mu A \sqrt{2gz}} = \frac{A_z}{\mu A \sqrt{2g}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{z_u} - \sqrt{z}}.$$

Při řešení integrálu zavedeme substituci:

$$y = \sqrt{z_u} - \sqrt{z}, \quad dz = -2(\sqrt{z_u} - y) dy$$

a meze integrace jsou:

$$\frac{z}{y = \sqrt{z_u} - \sqrt{z}} \Bigg|_{y_1 = \sqrt{z_u} - \sqrt{z_1}}^{z_2} \Bigg|_{y_2 = \sqrt{z_u} - \sqrt{z_2}}.$$

Řešení je tvaru:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{2A_z}{\mu A \sqrt{2g}} \int_{y(z_1)}^{y(z_2)} \frac{\sqrt{z_u} - y}{y} dy = \frac{2A_z}{\mu A \sqrt{2g}} \int_{y_1}^{y_2} \left(1 - \frac{\sqrt{z_u}}{y}\right) dy = \\ &= \frac{2A_z}{\mu A \sqrt{2g}} [y - \sqrt{z_u} \ln |y|]_{\sqrt{z_u} - \sqrt{z_2}}^{\sqrt{z_u} - \sqrt{z_1}} = \frac{2A_z}{\mu A \sqrt{2g}} \left[ \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_u} \cdot \ln \frac{\sqrt{z_u} - \sqrt{z_2}}{\sqrt{z_u} - \sqrt{z_1}} \right]. \end{aligned}$$

Pro prizmatickou nádobu bez přítoku ( $z_u = 0$ ) je čas potřebný ke změně polohy hladiny z úrovně  $z_1$  do  $z_2$ :

$$\begin{aligned} t &= -A_z \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\mu A \sqrt{2gz}} = \frac{A_z}{\mu A \sqrt{2g}} \int_{z_2}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \\ &= \frac{2A_z}{\mu A \sqrt{2g}} [\sqrt{z}]_{z_2}^{z_1} = \frac{2A_z}{\mu A \sqrt{2g}} (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}). \end{aligned}$$

Doba nutná pro úplné vyprázdnění ( $z_2 = 0$ ) pro prizmatickou nádobu bez přítoku ( $z_u = 0$ ) je:

$$T = \frac{2A_z \sqrt{z_1}}{\mu A \sqrt{2g}}.$$



**Příklad 7** ([9], s. 54) *Plnění válcové cisterny při  $Q_p = \text{konst.}$*

*Řešení:* Válcová nádoba s vodorovnou osou se prázdní otvorem v nejnižším místě, přičemž je postaráno o přívod vzduchu nad hladinu. Plocha hladiny je s hladinou proměnlivá  $A_z = 2L\sqrt{z(2r-z)}$ , kde  $L$  je délka cisterny,  $r$  je poloměr cisterny a  $z$  poloha hladiny. Čas potřebný ke změně polohy hladiny z úrovně  $z_1$  do  $z_2$  dostaneme dosazením  $A_z$  do (1.1), kde  $Q_p = 0$ :

$$t = - \int_{z_1}^{z_2} \frac{A_z dz}{\mu A \sqrt{2gz}} = - \frac{2L}{\mu A \sqrt{2g}} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{2r-z} dz.$$

Tento integrál řešíme substitucí

$$y = 2r - z, \quad dz = -dy$$

a meze integrace jsou:

$$\frac{z}{y = 2r - z} \parallel \frac{z_1}{y_1 = 2r - z_1} \mid \frac{z_2}{y_2 = 2r - z_2}$$

Čas potřebný ke změně polohy hladiny z úrovně  $z_1$  do  $z_2$  je pak:

$$\begin{aligned} t &= \frac{2L}{\mu A \sqrt{2g}} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{y} \, dy = \frac{2}{3} \frac{2L}{\mu A \sqrt{2g}} \left[ y^{\frac{3}{2}} \right]_{2r-z_1}^{2r-z_2} = \\ &= \frac{4L}{3\mu A \sqrt{2g}} \left( (2r - z_2)^{\frac{3}{2}} - (2r - z_1)^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned}$$

Doba pro úplné vyprázdnění celé cisterny ( $z_1 = 2r = d$  a  $z_2 = 0$ ) je

$$T = \frac{4Ld^{\frac{3}{2}}}{3\mu A \sqrt{2g}} \sim 0,301 \frac{Ld^{\frac{3}{2}}}{\mu A}.$$

**Příklad 8** ([10], s. 38, Řešený příklad 4.4) Z Planckova zákona odvoďte Stefanův–Boltzmannův zákon záření. 

*Řešení:* Vyjdeme z rovnice  $\Phi_e = \int_0^\infty \Phi_\lambda \, d\lambda$ , kterou převedeme na tvar s intenzitami vyzařování (dosadíme  $\Phi_e = M_e S$ , podobně  $\Phi_\lambda = M_\lambda S$ ), tedy

$$M_e = \int_0^\infty M_\lambda \, d\lambda$$

a za  $M_\lambda$  dosadíme Planckův zákon

$$M_\lambda(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot \left( e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)}, \quad c_1 = 2\pi h c^2, \quad c_2 = \frac{hc}{k},$$

takže máme vyřešit integrál

$$M_e = \int_0^\infty \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot \left( e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \, d\lambda.$$

Provedeme substituci  $x = \frac{c_2}{\lambda T}$  a najdeme

$$\lambda = \frac{c_2}{T} x^{-1}, \quad \frac{d\lambda}{dx} = -\frac{c_2}{T} x^{-2}$$

což dosadíme do rovnice integrálu. Bude

$$M_e = \int_\infty^0 \frac{c_1}{\left( \frac{c_2}{T} x^{-1} \right)^5 (e^x - 1)} \left( -\frac{c_2}{T} x^{-2} \right) dx = \frac{c_1 T^4}{c_2^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx,$$

kde integrál má hodnotu

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

Po dosazení za konstanty  $c_1$  a  $c_2$  dostaneme Stefanův–Boltzmanův zákon záření

$$M_e = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4.$$



**Příklad 9** ([10], s. 38, Řešený příklad 4.5) *Z Planckova zákona záření černého tělesa odvoďte Wienův posunovací zákon záření.*

*Řešení:* Vlnová délka ve Wienově posunovacím zákoně musí splňovat podmínku maxima funkce  $\frac{\partial M_\lambda}{\partial \lambda} = 0$ . Dosadíme-li do této podmínky Planckův zákon záření

$$M_\lambda(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot \left( e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)},$$

dostaneme rovnici

$$-\frac{5c_1}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} + \frac{c_1}{\lambda^5} \cdot \frac{\frac{c_2}{\lambda^2 T} e^{\frac{c_2}{\lambda T}}}{\left( e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^2} = 0,$$

kteřou zkrátíme výrazem  $\frac{c_1}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$  a dostaneme

$$\frac{c_2}{\lambda T} \cdot \frac{e^{\frac{c_2}{\lambda T}}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} = 5.$$

Zavedeme substituci  $x = \frac{c_2}{\lambda T}$  a dostaneme rovnici

$$x e^x = 5(e^x - 1),$$

jejíž řešení je  $x = 4,965$ . Substituci  $x = \frac{c_2}{\lambda T}$  upravíme pro oblast maximálního vyzařování na tvar  $\lambda_m T = c_2/x = b$ , kde jsme vlnovou délku označili indexem maxima a současně zavedli Wienovu konstantu  $b = c_2/x$ . Po dosazení konstanty  $c_2$  a  $x = 4,965$  dostaneme  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ .



**Příklad 10** ([11], s. 119, Řešený příklad 6.1) *Najděte střední a efektivní hodnotu harmonického proudu o periodě  $T$  a amplitudě proudu  $I_m$  po jednocestném usměrnění.*

*Řešení:* Časový průběh proudu  $i = I_m \sin \omega t$  po jednocestném usměrnění je v každé periodě  $T$  dán vztahy

$$i(t) = \begin{cases} I_m \sin \omega t & \text{pro } t \in \langle 0, \frac{T}{2} \rangle, \\ 0 & \text{pro } t \in \langle \frac{T}{2}, T \rangle, \end{cases}$$

kde  $\omega = 2\pi/T$ .

a) Střední hodnota proudu v časovém intervalu  $\langle 0, T \rangle$  je

$$I_s = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{1}{T} I_m \frac{T}{2\pi} \left[ -\cos \frac{2\pi}{T} t \right]_0^{T/2} = \frac{I_m}{\pi}.$$

b) Efektivní hodnotu proudu  $I$  v časovém intervalu  $\langle 0, T \rangle$  určíme ze vztahu

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{1}{T} \frac{I_m^2}{2} \int_0^{T/2} \left( 1 - \cos \frac{4\pi}{T} t \right) dt = \frac{I_m^2}{4},$$

$$I = \frac{I_m}{2}.$$

---



# Kapitola 2

## Komplexní příklady

### 2.1 Eulerova vzpěrná pevnost

Zjistěte posunutí všech bodů štíhlého kloubově uloženého lineárně pružného kového sloupu délky  $l$  s kruhovým průřezem o poloměru  $r \ll l$ , zatíženým osovou silou  $N$ ; gravitační síly zanedbejte. Je znám kladný Youngův modul pružnosti (v tahu, tlaku i ohybu)  $E$ .



**Řešení:** Uvažujme sloup jako jednorozměrnou konstrukci s body  $x \in \langle 0, l \rangle$ , s pevným kloubem v bodě  $x = 0$  a s posuvným kloubem v bodě  $x = l$ , v němž působí síla  $N$ , která je kladná, jde-li o tlak, a záporná, jde-li o tah.

Nejprve vypočteme obsah průřezu  $A$  a moment setrvačnosti  $J$  (pro rovinnou úlohu, ve směru kolmém na  $x$ ):

$$A = \pi r^2,$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r (\rho \cos \varphi)^2 \cdot \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\varphi)) d\varphi \int_0^r \rho^3 d\rho \\ &= \frac{1}{2} \left[ \varphi + \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{4} \pi r^4. \end{aligned}$$

Označme  $\sigma$  napětí ve sloupu,  $\varepsilon$  přetvoření,  $u$  posunutí ve směru  $x$  a  $w$  posunutí ve směru kolmém na  $x$ . V tzv. teorii prvního řadu (rovnováha se formuluje na nedeformované konstrukci) je  $w = 0$  a stav napjatosti a přetvoření je určen Cauchyho podmínkou rovnováhy, Hookovým zákonem a vztahem mezi posunutím a přetvořením:

$$\sigma' = 0, \quad \sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon = u'.$$

Počáteční podmínky jsou  $u(0) = 0$  a  $\sigma(l) = N/A$ .

V proměnné  $u$  dostáváme pouze

$$EAu'' = 0, \quad u(0) = 0, \quad EAu'(l) = N.$$



Hledané posunutí je tedy

$$u = \frac{N}{EA}x;$$

tomu odpovídá konstantní přetvoření  $\varepsilon = N/(EA)$  a napětí  $\sigma = N/A$ .

Tento výsledek se blíží realitě jen pro  $N < 0$  (tah), případně  $N = 0$  (nezaťžený sloup), nikoliv pro  $N > 0$  (tlak). V tzv. teorii druhého řádu (rovnováha se formuluje na deformované konstrukci) počítáme navíc s ohybovým momentem  $M = Nw$ , jež lze vyjádřit rovněž ve tvaru

$$M = -EJ\kappa(w),$$

kde  $\kappa(w)$  je první křivost sloupu, tj. odchylka jeho střednicové křivky od přímky v oskulační rovině. Okrajové podmínky jsou přitom  $w(0) = w(l) = 0$ . Přesně je

$$\kappa(w) = \frac{w''}{\sqrt{(1+w'^2)^{3/2}}}.$$

Dostáváme tak

$$\kappa(w) + \frac{N}{EJ}w = 0.$$

Doposud jsme uvažovali jen  $\kappa(w) = 0$ , nyní položíme  $\kappa(w) = w''$ ; tím ovšem přecházíme ke speciálnímu dvourozměrnému (rovinnému) modelu. Označíme-li

$$\alpha = \sqrt{\frac{|N|}{EJ}},$$

dostáváme tak pro  $N < 0$  lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$w'' + \alpha^2 w = 0,$$

pro  $N > 0$  obdobně

$$w'' - \alpha^2 w = 0$$

a konečně pro  $N = 0$  pouze  $w'' = 0$ , a tedy (vzhledem k okrajovým podmínkám)  $w = 0$ .

Pro  $N < 0$  je obecné řešení

$$w = C_1 \sinh(\alpha x) + C_2 \cosh(\alpha x),$$

kde konstanty  $C_1$  a  $C_2$  určíme z okrajových podmínek:

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sinh(\alpha l) + C_2 \cosh(\alpha l) = 0.$$

Poněvadž  $\alpha l > 0$ , nemůže být  $\sinh(\alpha l) = 0$ , takže i  $C_1 = 0$ , a tedy  $w = 0$ . Žádný nový výsledek jsme nedostali.

Pro  $N > 0$  je obecné řešení

$$w = C_1 \sinh(\alpha x) + C_2 \cosh(\alpha x),$$

kde konstanty  $C_1$  a  $C_2$  určíme z okrajových podmínek:

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin(\alpha l) + C_2 \cos(\alpha l) = 0.$$

Pokud je  $\sinh(\alpha l) \neq 0$ , je opět i  $C_1 = 0$ , a tedy  $w = 0$ ; nelze však vyloučit případ  $\sinh(\alpha l) = 0$ , který nastane pro  $\alpha = k\pi/l$  a libovolné přirozené  $k$ . Následně vychází

$$w = C_1 \sin \frac{k\pi x}{l},$$

kde  $C_1$  může být libovolné; např. pro  $x = l/2$  máme tedy libovolný průhyb  $w = C_1$ . Odpovídající tlaková síla je

$$N = EJ \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2;$$

v praxi je nebezpečná už první z nich pro  $k = 1$ , tzv. Eulerova kritická síla. Od této síly se pak obvykle odvozuje tzv. vzpěrná pevnost, s níž pracuje řada technických norem.

Nerealistická libovolná hodnota průhybu  $w$  je důsledkem zjednodušení: zanedbání gravitace, linearizace  $\kappa(w)$  atd. Zpřesnění výsledku by vyžadovalo hlubší znalosti teorie diferenciálních rovnic (zejména vlastních čísel diferenciálních operátorů, obecně nelineárních) a jejich numerického řešení.

## 2.2 Nosník na Winklerově podloží

Zjistěte průhyb lineárně pružného oboustranně vetknutého nosníku délky  $l$  příčně zatíženého kladným rovnoměrným zatížením  $q$ , jehož obdélníkový průřez má šířku  $b$  a výšku (ve směru zatížení)  $h$ . Nosník se známým kladným Youngovým modulem pružnosti v ohybu  $E$  je uložen na Winklerově podloží s kladným základovým modulem (vyjádřeným jako tlak na jednotku délky nosníku)  $K$ . Vyšetřete rovněž limitní případ  $K \rightarrow 0$ .



Řešení: Nejprve vypočteme potřebný moment setrvačnosti

$$J = \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = [x]_{-b/2}^{b/2} \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{12} b h^3.$$

Základní rovnice elementární ohybové teorie nosníků (prozatím bez uvážení vlivu podloží) pro zatížení  $q$  (zde konstantní), posouvající sílu  $T$ , ohybový moment  $M$ , pootočení  $\varphi$  a průhyb  $w$  (v obvyklé znaménkové konvenci) jsou

$$T' = -q, \quad M' = T, \quad EJ\varphi' = -M, \quad w' = \varphi;$$

po vyloučení  $T$ ,  $M$  a  $\varphi$  z nich vychází

$$EJw'''' = q.$$

Obecné řešení této rovnice získáme snadno čtyřnásobným přímým integrováním ve tvaru

$$EJw = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \frac{qx^4}{24}.$$

Pro jeho první derivaci pak platí

$$EJw' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \frac{qx^3}{6}.$$

Konstanty  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  a  $C_3$  je třeba určit z okrajových podmínek ve vetknutí

$$w(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad \varphi(l) = 0$$

čili

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad w'(l) = 0.$$

Zřejmě je  $C_0 = C_1 = 0$ ; pro zbylé dvě konstanty dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} l^2 & l^3 \\ 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = -\frac{ql^2}{24} \begin{bmatrix} l^2 \\ 4l \end{bmatrix},$$

jejíž řešení podle Cramerova pravidla je

$$C_2 = -\frac{ql^2}{24} \cdot \frac{3l^4 - 4l^4}{3l^2 - 2l^2} = \frac{ql^2}{24}, \quad C_3 = -\frac{ql^2}{24} \cdot \frac{4l^3 - 2l^3}{3l^2 - 2l^2} = -\frac{2ql}{24}.$$

Dostáváme tak

$$w = \frac{ql^2}{24EJ}(l-x)^2$$

a speciálně pro  $x = l/2$  známý vzorec

$$w(l/2) = \frac{ql^4}{384EJ}.$$

Pro zahrnutí vlivu podloží stačí  $q$  v uvedených diferenciálních rovnicích nahradit  $q - kbw$ . Označíme-li

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EJ}}, \quad \gamma = \sqrt[4]{\frac{q}{4EJ}},$$

dostaneme

$$4w'''' + \beta^4 w = \gamma^4.$$


---

Charakteristická rovnice pro příslušnou zkrácenou rovnici (s nulovou pravou stranou) je

$$4\lambda^4 + \beta^4 = 0.$$

Její čtyři komplexní řešení ve tvaru  $\lambda = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  lze určit pomocí Moivroy věty pro  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$  ze vztahu

$$(\sqrt{2}\rho)^4(\cos(4\varphi) + i \sin(4\varphi)) = \beta^4(\cos((2j+1)\pi) + i \sin((2j+1)\pi)).$$

Zřejmě je  $\sqrt{2}\rho = \beta$  a  $\varphi = (2j+1)\pi/4$ , takže

$$\lambda \in \{\beta + i\beta, \beta - i\beta, -\beta + i\beta, -\beta - i\beta\}.$$

Obecné řešení (nezkrácené) rovnice pak lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} w &= A_1 \exp(\beta x) \sin(\beta x) + A_2 \exp(\beta x) \cos(\beta x) \\ &+ A_3 \exp(-\beta x) \sin(\beta x) + A_4 \exp(-\beta x) \cos(\beta x) + \gamma. \end{aligned}$$

Jeho první derivace je

$$\begin{aligned} w' &= (A_1 - A_2)\beta \exp(\beta x) \sin(\beta x) + (A_1 + A_2)\beta \exp(\beta x) \cos(\beta x) \\ &- (A_3 + A_4)\beta \exp(-\beta x) \sin(\beta x) + (A_3 - A_4)\beta \exp(-\beta x) \cos(\beta x). \end{aligned}$$

Konstanty  $A_1, A_2, A_3$  a  $A_4$  je třeba opět určit z okrajových podmínek ve vetknutí. Označíme-li pro jednoduchost

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \exp(\beta l) \sin(\beta l), & \alpha_2 &= \exp(\beta l) \cos(\beta l) \\ \alpha_3 &= \exp(-\beta l) \sin(\beta l), & \alpha_4 &= \exp(-\beta l) \cos(\beta l), \end{aligned}$$

dostáváme soustavu čtyř rovnic

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_4 - \alpha_3 & -\alpha_3 - \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z prvních dvou rovnic můžeme vypočítat

$$A_4 = \gamma - A_2, A_3 = A_4 - A_1 - A_2 = \gamma - A_1 - 2A_2;$$

po dosazení již obdržíme soustavu pouze dvou rovnic

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_3 & \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 & \alpha_2 - \alpha_1 + 2\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(1 - \alpha_3 - \alpha_4) \\ 2\gamma\alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Podle Cramerova pravidla potom je  $A_1 = D_1/D$  a  $A_2 = D_2/D$ , kde

$$D = \alpha_1^2 - 5\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_4 + \alpha_4^2,$$

$$D_1 = -\gamma(\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4 + 3\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 - 2\alpha_3^2),$$

$$D_2 = \gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - 3\alpha_1\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2).$$

Speciálně pro  $x = l/2$  (a pro již známé konstanty  $A_1, A_2, A_3$  a  $A_4$ ) tak dostáváme

$$w(l/2) = A_1 \exp(\beta l/2) \sin(\beta l/2) + A_2 \exp(\beta l/2) \cos(\beta l/2)$$

$$+ A_3 \exp(-\beta l/2) \sin(-\beta l/2) + A_4 \exp(-\beta l/2) \cos(-\beta l/2) + \gamma$$

neboli (s využitím známých trigonometrických vzorců)

$$2w(l/2) = A_1(\exp(\beta l/2) - \alpha_2 \exp(-\beta l/2)) + A_2(\exp(\beta l/2) + \alpha_2 \exp(-\beta l/2))$$

$$+ A_3(\exp(-\beta l/2) - \alpha_4 \exp(\beta l/2)) + A_4(\exp(-\beta l/2) + \alpha_4 \exp(\beta l/2)) + 2\gamma.$$

Případ  $k = 0$  jsme již vyřešili samostatně. Pro  $k \rightarrow 0_+$  je zřejmě  $\beta \rightarrow 0_+$  a limitní analýzou (s opakovaným použitím L'Hospitalova pravidla) bychom měli dospět ke stejnému výsledku. Tento postup je však pracný a zdlouhavý, a proto jej rádi přenecháme trpělivému čtenáři.

## 2.3 Kirchhoffova rotačně symetrická deska



Na základě Kirchhoffovy ohybové teorie tenkých desek zjistěte maximální průhyb pružné homogenní a izotropní tenké válcové desky tloušťky  $h$  o poloměru  $r \gg h$ , jež způsobuje předepsané speciální rotačně symetrické příčné zatížení. Jsou známy hustota materiálu  $\rho$ , Youngův modul pružnosti  $E$ , Poissonova konstanta  $\mu$  (mezi 0 a 1) a místní gravitační zrychlení  $g$ . Předepsané zatížení je takové, že jeho známá liniová výslednice  $q$  (síla na jednotku délky vztažená k průměru desky) se nemění se vzdáleností od středu desky.

Řešení: Pro popis desky použijeme cylindrické souřadnice  $(\rho, \varphi, z)$ : deska zaujímá polohu  $\rho \in [0, r]$ ,  $\omega \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [-h/2, h/2]$ . Normálová napětí  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\omega$  a tangenciální napětí  $\tau_{\rho z}$  nahrazujeme v Kirchhoffově teorii pro rotačně symetrický stav napjatosti i přetvoření jejich liniovými silovými a momentovými výslednicemi, tj. posouvající silou a ohybovými momenty v radiálním a tangenciálním směru

$$t = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz, \quad m_\rho = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_\rho dz, \quad m_\omega = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_\omega dz,$$

takže Cauchyho podmínky statické rovnováhy generují pouze jednu silovou a jednu momentovou rovnici (čárka v tomto příkladě naznačuje derivaci podle  $\rho$ )

$$t' + \frac{t}{\rho} + q = 0, \quad m_\rho - m_\varphi + \rho m'_\rho = \rho t.$$

kde  $q$  je celkové příčné liniové zatížení, získané integrací přes  $\omega \in [0, 2\pi)$ .

První rovnici lze zapsat ve tvaru

$$\rho t' + t = -\rho q$$

a vypočítat z ní  $t$  pomocí Eulerovy substituce  $t = \exp(\eta)$ . Zřejmě je  $t' = \exp(-\eta)\dot{t}$  (tečka zde znamená derivaci podle nové proměnné  $\eta$ ). Po dosazení vychází již rovnice s konstantními koeficienty

$$\dot{t} + t = \exp(-\eta),$$

jejíž obecné řešení

$$t = C \exp(-\eta) - \frac{q}{2} \exp(\eta) = \frac{C}{\rho} - \frac{q}{2}\rho$$

závisí na konstantě  $C$ . Poněvadž však pro  $\rho \rightarrow 0_+$  je nepřípustné  $t \rightarrow \pm\infty$ , je nutně  $C = 0$ .

Posunutí ve směru  $\rho$  se v Kirchhoffově teorii přibližně uvažuje jako  $u = -z\varphi$ , kde  $\varphi$  je úhel sevřený řezem střednicové roviny deformované desky a osou  $r$ , přičemž pro průhyb  $w$  platí  $w' = \varphi$ , takže složky přetvoření jsou

$$\varepsilon_r = u' = -z\varphi', \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{\rho} = -z\frac{\omega}{\rho}$$

a lineární Hookův zákon lze zapsat ve tvaru

$$\sigma_\rho = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi), \quad \sigma_\omega = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r).$$

Vyjádříme-li postupně  $\sigma_r$  a  $\sigma_\varphi$  pomocí  $\varepsilon_\rho$  a  $\varepsilon_\varphi$  a výsledek poté pomocí  $\varphi$  a  $\varphi'$ , zavedše stručné označení

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

(tzv. ohybovou tuhost), dostaneme po úpravě

$$m_\rho = -B \left( \varphi' + \mu \frac{\varphi}{\rho} \right), \quad m_\omega = -B \left( \mu \frac{\varphi}{\rho} + \mu \varphi' \right).$$

Dosadíme-li tyto vztahy do momentové rovnice, obdržíme konečně

$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{\rho} - \frac{\varphi}{\rho^2} = -\frac{t}{B}.$$

Jelikož  $t = -q\rho/2$ , lze odvozenou rovnici zapsat ve tvaru

$$\rho^2 \varphi'' + \rho \varphi' - \varphi = \frac{q}{2B} \rho^3$$

a vypočítat z ní  $t$  pomocí Eulerovy substituce  $\varphi = \exp(\kappa)$  (tečka zde znamená derivaci podle nové proměnné  $\kappa$ ). Zřejmě je  $\varphi' = \exp(-\kappa)\dot{\rho}$  a  $\varphi'' = \exp(-2\kappa)(\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)$ . Po dosazení vychází již rovnice s konstantními koeficienty

$$\ddot{\varphi} - \varphi = \frac{q}{2B} \exp(3\kappa),$$

jejíž obecné řešení

$$\varphi = C_1 \exp(\kappa) + C_0 \exp(-\kappa) + \frac{q}{16B} \exp(3\kappa) = C_1 \rho + \frac{C_0}{\rho} + \frac{q}{16B} \rho^3$$

závisí na konstantách  $C_0$  a  $C_1$ . Poněvadž však pro  $\rho \rightarrow 0_+$  je nepřipustné  $\varphi \rightarrow \pm\infty$ , je nutně  $C_0 = 0$ .

S pomocí

$$\varphi = C_1 \rho + \frac{q}{16B} \rho^3, \quad \varphi' = C_1 + \frac{3q}{16B} \rho^2$$

nyní vypočteme

$$\begin{aligned} m_\rho &= -B \left( C_1 + \frac{3q}{16B} \rho^2 + \mu C_1 + \mu \frac{q}{16B} \rho^2 \right) \\ &= -B \left( (1 + \mu) C_1 + (3 + \mu) \frac{q}{16B} \rho^2 \right). \end{aligned}$$

Z podmínky nulového ohybového momentu v prostém uložení  $m_\rho(r) = 0$  pak dostaneme

$$C_1 = -\frac{3 + \mu}{1 + \mu} \cdot \frac{q}{16B} r^2,$$

a tedy

$$\varphi = -\frac{q}{16B} \left( \frac{3 + \mu}{1 + \mu} r^2 \rho - \rho^3 \right).$$

Přímým integrováním vychází

$$w = -\frac{q}{16B} \left( \frac{3 + \mu}{1 + \mu} r^2 \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) + K = -\frac{q\rho^4}{64B} \left( 2 \frac{3 + \mu}{1 + \mu} r^2 - \rho^2 \right) + K,$$

kde poslední neznámou integrační konstantu  $K$  najdeme z podmínky nulového průhybu  $w(r) = 0$  ve tvaru

$$K = \frac{qr^4}{64B} \left( 2 \frac{3 + \mu}{1 + \mu} - 1 \right) = \frac{3qr^4}{16Eh^3} (5 + 8\mu + 3\mu^2).$$

Rovnice  $\varphi = 0$  (čili  $w' = 0$ ) má zřejmě jediné řešení  $\rho = 0$ , takže funkce  $w$  může mít extrém pouze v bodech  $\rho = 0$  a  $\rho = r$ . Poněvadž  $w(r) = 0$ , je maximální průhyb desky  $w(0) = K$ .

## 2.4 Fourierova analýza vedení tepla stěnou

Teplota vnějšího prostředí na levé straně stěny tloušťky  $l$  se od srovnávací teploty  $\tau$  v čase  $t \in [0, t_*]$ , kde  $t_*$  je zadaná délka časového intervalu, liší o hodnoty předepsané funkcí  $\vartheta_0(t)$ , na její pravé straně o hodnoty předepsané funkcí  $\vartheta_1(t)$ ; pro  $t = 0$  jsou obě tyto funkce nulové. Pomocí jednorozměrného modelu vedení tepla podle Fourierova zákona (vnitřní tepelné zdroje, přestup tepla ani jeho sálání neuvažujte) vyšetřete vývoj teploty  $T$  ve stěně. Speciálně určete teplotu uprostřed stěny v koncovém čase  $t_*$  za předpokladů



$$\vartheta_1(t) = 0, \quad \vartheta_0(t) = \frac{\delta t_*}{\pi} \sin \frac{\pi t}{t_*},$$

kde  $\delta$  je známý přírůstek teploty v čase. Jsou známy tepelná vodivost materiálu stěny  $\lambda$ , jeho tepelná kapacita (vztahovaná k jednotce hmotnosti)  $c$  a hustota  $\rho$ .

**Řešení:** Polohu bodu ve stěně popíšeme souřadnicí  $x \in [0, l]$ ; tečka bude označovat derivaci podle  $t$ , čárka podle  $x$ . Rovnici vedení tepla pro neznámou teplotu  $T(x, t)$ , vycházející z Fourierova zákona

$$q = -\lambda T'$$

pro tepelný tok  $q(x, t)$  a ze zákona zachování energie

$$c\rho\dot{T} + q' = 0$$

potom lze zapsat ve tvaru

$$c\rho\dot{T} - \lambda T'' = 0.$$

Zavedeme-li tzv. teplotní vodivost  $a = \lambda/(c\rho)$  a označíme-li  $\tau = T - \vartheta$ , kde

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_0(t) \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \vartheta_1(t) \frac{x}{l},$$

dostáváme tak

$$\dot{\tau} - a\tau'' = -\dot{\vartheta},$$

kde pro  $x = 0$  i pro  $x = l$  je neustále  $\tau = 0$ .

Pomocí Fourierovy metody separace proměnných lze  $\tau$  hledat ve tvaru

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \psi_n(t),$$

kde funkce  $\varphi_n$  tvoří ortogonální bázi Lebesguova prostoru funkcí integrovatelných s druhou mocninou na intervalu  $[0, l]$ , přičemž  $\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0$ , a funkce  $\psi_n$  patří do obdobného prostoru funkcí na intervalu  $[0, t_*]$ . Máme tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \dot{\psi}_n - a \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'' \psi_n = -\dot{\vartheta}.$$



V prvním z uvedených prostorů lze zavést skalární součin

$$(f, g) = \int_0^l f(x)g(x)dx$$

pro libovolnou dvojici funkcí  $f$  a  $g$ . Vynásobíme-li tedy naši rovnici pro libovolné přirozené číslo  $n$  formálně funkcí  $\varphi_n(x)$  a výsledek zintegrujeme přes interval  $[0, l]$ , obdržíme

$$(\varphi_n, \varphi_n)\dot{\psi}_n - a(\varphi_n, \varphi_n'')\psi_n = -(\varphi_n, \dot{\vartheta}).$$

Integrací per partes vychází

$$(\varphi_n, \varphi_n)\dot{\psi}_n + a(\varphi_n', \varphi_n')\psi_n = -(\varphi_n, \dot{\vartheta}).$$

Nové označení

$$\alpha_n = \frac{(\varphi_n', \varphi_n')}{(\varphi_n, \varphi_n)}, \quad \zeta_n(t) = -\frac{(\varphi_n, \dot{\vartheta}(t))}{(\varphi_n, \varphi_n)}$$

nám umožňuje tento výsledek zapsat jednoduše jako

$$\dot{\psi}_n + \alpha_n a \psi_n = \zeta_n.$$

Odvozenou rovnici můžeme řešit pro libovolné přirozené  $n$  metodou variace konstanty. Obecné řešení příslušné zkrácené rovnice (s nulovou pravou stranou) je

$$\psi_n(t) = C_n \exp(-\alpha_n at)$$

pro libovolnou reálnou konstantu  $C_n$ ; partikulární řešení původní rovnice lze tedy nalézt ve tvaru

$$\psi_n(t) = K_n(t) \exp(-\alpha_n at),$$

v němž vystupuje jistá funkce  $K_n$  závislá na čase. Zřejmě však platí

$$\dot{K}_n(t) \exp(-\alpha_n at) = \zeta_n(t),$$

takže integrací snadno dostáváme

$$K_n(t) = \int_0^t \exp(\alpha_n as) \zeta_n(s) ds.$$

Vzhledem k počáteční podmínce požadující nulové  $\tau$  pro  $t = 0$  je nutně

$$\psi_n(t) = \int_0^t \exp(\alpha_n a(s-t)) \zeta_n(s) ds.$$

Klasická Fourierova sinová řada

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

pro přirozená  $n$  vyhovuje jak okrajovým podmínkám  $\varphi_n(0) = \varphi_n(l)$ , tak podmínkám ortogonality  $(\varphi_n, \varphi_m) = 0$  pro jakékoliv přirozené  $m$ . Navíc platí

$$\begin{aligned} (\varphi_n, \varphi_n) &= \frac{l}{2}, & (\varphi'_n, \varphi'_n) &= \frac{(n\pi)^2}{2l}, \\ (\varphi_n, l) &= -(-1)^n \frac{l^2}{n\pi}, & (\varphi_n, l-x) &= \frac{l^2}{n\pi}, \end{aligned}$$

a tedy rovněž

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \\ \zeta_n &= \frac{2}{l} \left( (\varphi_n, l-x) \frac{\dot{\vartheta}_0}{l} + (\varphi_n, x) \frac{\dot{\vartheta}_1}{h} \right) = \frac{1}{n\pi} \left( \dot{\vartheta}_0 - (-1)^n \dot{\vartheta}_1 \right). \end{aligned}$$

(Odvození všech těchto vztahů je lehké, jen poněkud pracné; ponecháváme je proto čtenáři, jenž se potřebuje pocvičit v integrování per partes.) Poněvadž  $\tau$  je (teoreticky nekonečným) součtem součinů  $\varphi_n(x)\psi_n(t)$ ,  $\psi_n(x)$  známe a  $\psi_n(t)$  dokážeme vypočítat (přínejhorším numerickou kvadraturou, např. Simpsonovou metodou) z integrálu, v němž vystupuje konstanta  $\alpha_n$  a funkce  $\zeta_n(s)$  pro  $s \in [0, t]$ , umíme už určit  $T = \tau + \vartheta$  kdekoliv na  $[0, l] \times [0, t_*]$ .

Označme  $\nu = \pi/t_*$ . Speciálně s využitím substituce  $u = \nu t$  máme

$$\dot{\vartheta}_1 = 0, \quad \dot{\vartheta}_0 = \cos u, \quad \zeta_n = \frac{\delta}{n\pi} \cos u,$$

takže  $\psi_n$  lze získat integrováním per partes dokonce v analytickém tvaru

$$\psi_n = \frac{\delta (\alpha_n a \cos u + \nu \sin u - \alpha_n a \exp(-\alpha_n a t))}{n\pi ((\alpha_n a)^2 + \nu^2)}.$$

Rovněž je

$$\vartheta = \frac{\delta}{\nu} \sin u,$$

a tedy

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \psi_n + \vartheta \\ &= \frac{\delta}{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha_n a \cos u + \nu \sin u - \alpha_n a \exp(-\alpha_n a t)}{(\alpha_n a)^2 + \nu^2} \sin \frac{n\pi x}{l} + t_* \sin u \right). \end{aligned}$$

Zbývá dosadit  $t = t_*$  a  $x = l/2$ . Zavedeme-li označení  $\varepsilon_n$  tak, že  $\varepsilon_n = 0$  pro sudé  $n$ ,  $\varepsilon_n = 1$  pro liché  $n$  takové, že  $n+1$  je dělitelné čtyřmi, a  $\varepsilon_n = -1$  pro jiné liché  $n$ , dostaneme

$$\sin \frac{n\pi x}{l} = \sin \frac{n\pi}{2} = -\varepsilon_n;$$

mimoto je  $\sin u = \sin \pi = 0$  a  $\cos u = \cos \pi = -1$ . Hledaná teplota tedy vychází (respektujeme-li označení  $\alpha_n$  a  $\varepsilon_n$ ) ve tvaru součtu nekonečné řady

$$T(l/2, t_*) = \frac{\delta a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \varepsilon_n}{n} \cdot \frac{1 + \exp(-\alpha_n a t_*)}{(\alpha_n a)^2 + (\pi/t_*)^2}.$$

## 2.5 Bredtovy vzorce pro kroucení prutu



Tenkostěnný ocelový nosník uzavřeného průřezu, jehož střednicovou čarou je elipsa o délce hlavní poloosy  $a$  a délce vedlejší poloosy  $b \leq a$ , o konstantní tloušťce  $h \ll b$  je namáhán ve třetině svého rozpětí  $l \gg a$  kladným osamělým kroučícím momentem  $M$  a od dvou třetin svého rozpětí do jeho konce kladným rovnoměrným kroučícím momentovým zatížením  $m$ , přičemž  $6M > ml$ . Nosič je na obou koncích upevněn proti kroucení. Zjistěte extrémní smykové napětí a extrémní pootočení nosníku za předpokladu pružného přetvoření se známým modulem pružnosti oceli ve smyku  $G$ .

Řešení: Pro kroucení prutu tenkostěnného průřezu konstantní tloušťky je k dispozici dvojice tzv. Bredtových vzorců

$$W = 2Ah, \quad I = \frac{4hA^2}{s},$$

v níž vystupují průřezový modul  $W$ , moment tuhosti v kroucení  $I$ , obsah průřezu omezeného střednicovou křivkou  $A$  a délka této křivky  $s$ . Extrémní smykové napětí v průřezu (největší v absolutní hodnotě) pak je  $\tau = K/W$ , kde  $K$  je příslušný kroučící moment, a pootočení průřezu  $\vartheta$  lze pro  $x \in [0, l]$  získat řešením rovnice  $K = -GI\vartheta'$  pro počáteční podmínky  $\vartheta(0) = \vartheta(l) = 0$ .

V našem případě je střednicovou křivkou elipsa  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$  pro  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , takže

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab\rho d\rho = 2\pi ab \left[ \frac{1}{2}\rho^2 \right]_0^1 = \pi ab.$$

Derivováním podle  $\varphi$ , jež naznačujeme tečkou, dostaneme

$$\dot{x} = -a \sin \varphi, \quad \dot{y} = b \cos \varphi$$

a s použitím označení

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

následně

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - (k \cos \varphi)^2} d\varphi.$$

Tento tzv. eliptický integrál dává pro  $k = 0$ , tj. pro kružnici s  $a = b$ , známý analytický výsledek  $s = 2\pi a = 2\pi b$ , obecně lze však  $s \in [2\pi b, 2\pi a]$  určit jedinečně ve tvaru součtu nekonečné řady, případně numerickým integrováním.

Označme  $M_0$  momentovou reakci v levé podpoře a dále intervaly  $\Omega_1 = \langle 0, l/3 \rangle$ ,  $\Omega_2 = \langle l/3, 2l/3 \rangle$ ,  $\Omega_3 = \langle 2l/3, l \rangle$ ,  $\Omega_1^- = \langle 0, l/3 \rangle$  a  $\Omega_2^+ = \langle l/3, 2l/3 \rangle$ . Z podmínky statické rovnováhy dostáváme průběh kroučícího momentu

$$K(x) = \begin{cases} -M_0 & \forall x \in \Omega_1^-, \\ M - M_0 & \forall x \in \Omega_2^+, \\ M - M_0 + m(x - 2l/3) & \forall x \in \Omega_3. \end{cases}$$

Všimněme si, že  $\Omega_1^-$  a  $\Omega_2^+$  zde nemůžeme jednoduše nahradit  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  vzhledem k tomu, že limita  $K(x)$  pro  $x \rightarrow l/3$  neexistuje (není stejná zleva i zprava). Tento nedostatek (jež lze odstranit až pomocí tzv. Diracovy distribuce) však nebude bránit dalšímu výpočtu: při integrování má jediný bod nulovou míru.

Poněvadž úloha je staticky neurčitá, nezbyvá než určit  $M_0$  z okrajových podmínek. S přihlédnutím k podmínce  $\vartheta(0) = 0$  vychází příomou integrací

$$-GI\vartheta(x) = \begin{cases} -M_0x & \forall x \in \Omega_1, \\ -M_0x + M(x - l/3) & \forall x \in \Omega_2, \\ -M_0x + M(x - l/3) + m(x - 2l/3)^2 & \forall x \in \Omega_3. \end{cases}$$

Z podmínky  $\vartheta(l) = 0$  (a tedy i  $-GI\vartheta(l) = 0$ ) obdržíme již (nezávisle na  $GI$ ) hledanou reakci

$$M_0 = \frac{2}{3}M + \frac{1}{18}ml.$$

Výsledný průběh kroučícího momentu tedy je

$$K(x) = \begin{cases} -2M/3 - ml/18 & \forall x \in \Omega_1^-, \\ M/3 - ml/18 & \forall x \in \Omega_2^+, \\ M/3 - ml/18 + m(x - 2l/3) & \forall x \in \Omega_3, \end{cases}$$

zatímco pro průběh pootočení platí

$$GI\vartheta(x) = \begin{cases} (2M/3 + ml/18)x & \forall x \in \Omega_1, \\ (2M/3 + ml/18)x - M(x - l/3) & \forall x \in \Omega_2, \\ (2M/3 + ml/18)x - M(x - l/3) - m(x - 2l/3)^2/2 & \forall x \in \Omega_3. \end{cases}$$

Extrémní napětí  $\tau$  vznikne v místě extrémního kroučícího momentu  $K$ . Funkce  $K$  je zřejmě rostoucí, takže

$$\min \tau = \frac{K(0)}{W} = -\frac{1}{W} \left( \frac{2}{3}M + \frac{1}{18}ml \right),$$

$$\max \tau = \frac{K(l)}{W} = \frac{1}{W} \left( \frac{1}{3}M + \frac{5}{18}ml \right).$$

Zbývá najít extrémní pootočení, pro něž musí být, existuje-li derivace  $\vartheta$ , nutně  $K = 0$ . Poněvadž  $M > ml/6$ , je na  $\Omega_1^-$  nutně  $K < 0$  a na  $\Omega_2^+ \cup \Omega_3$  nutně  $K > 0$ . Mimo  $x = 0$  a  $x = l$ , kde  $\vartheta = 0$ , zbývá jedině  $x = l/3$ , kde

$$GI\vartheta(l/3) = \frac{l}{9} \left( 2M + \frac{1}{6}ml \right),$$

takže

$$\min \vartheta = 0, \quad \max \vartheta = \frac{1}{9GI} \left( 2M + \frac{1}{6}ml \right).$$

## 2.6 Boussinesqovo pružné podloží



Zjistěte pokles podloží v hloubce  $h$  pod úrovní terénu, je-li svislé zatížení realizováno čtyřmi osamělými břemeny  $P$  ve vrcholu čtverce, jehož úhlopříčka má délku  $2h$ . Předpokládejte, že podloží se chová jako homogenní izotropní pružný poloprostor a že jsou známy jeho kladný Youngův modul pružnosti  $E > 0$  a Poissonova konstanta  $\mu \in \langle 0, 1/2 \rangle$ .

Řešení: Pro stručnost zápisu označíme  $a = 1 - 2\mu$  a  $b = a + 1$  a zavedeme tzv. Lamého konstanty

$$\lambda_2 = \frac{E}{1 + \mu}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_2 \mu}{a}$$

(konstanta  $\lambda_2$  je shodná s modulem pružnosti ve smyku) a kartézské souřadnice  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Budeme přitom předpokládat, že zatížení působí kolmo na rovinu  $x_3 = 0$  v bodech  $A_1 = [h, 0, 0]$ ,  $A_2 = [-h, 0, 0]$ ,  $A_3 = [0, h, 0]$ ,  $A_4 = [0, -h, 0]$ .

Pro jednotlivé složky napětí  $\sigma_{ij}$  v pružném poloprostoru  $x_3 \geq 0$  platí Cauchyho rovnice rovnováhy

$$\sum_{k=1}^3 \partial \sigma_{kj} / \partial x_j = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, 3\},$$

pro složky přetvoření  $\varepsilon_{ij}$  potom Hookův konstitutivní vztah

$$\sigma_{ij} = \lambda_1 \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} + 2\lambda_2 \varepsilon_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\},$$

kde tzv. Kroneckerův symbol  $\delta_{ij}$  nabývá hodnoty 1 pro  $i = j$  a 0 pro  $i \neq j$ , přičemž pro složky posunutí oproti výchozí geometrické konfiguraci (tj. nezatíženému poloprostoru)  $u_i$ ,  $u_j$  je

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Vyjádříme-li postupně složky napětí v Cauchyho rovnicích rovnováhy pomocí složek přetvoření, a ty pomocí posunutí, dostaneme stacionární rovnici lineární pružnosti (bez vnitřních zatížení) ve tvaru

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{k=1}^3 \partial^2 u_k / \partial x_i \partial x_k + \lambda_1 \partial^2 u_i / \partial x_k^2 = 0.$$

Řešení této rovnice musí splňovat předepsané okrajové podmínky. V našem případě pro příčné zatížení  $q(x_1, x_2, x_3)$  na hranici  $x_3 = 0$  bychom měli podmínky rovnováhy

$$\sigma_{i1} = \sigma_{i2} = 0, \quad \sigma_{i3} = q,$$

vyjádřitelné opět až pomocí složek posunutí, nicméně formálně  $q$  by bylo nulové všude mimo body  $A_1, A_2, A_3$  a  $A_4$ , zatímco v těchto bodech by  $q$  muselo růst k nekonečnu. Namísto  $P$  lze nicméně zatížení  $q = P/\omega$  uvažovat v rovině  $x_3 = 0$  na dostatečně malé oblasti o obsahu  $\omega$  a studovat limitní chování pro  $\omega \rightarrow \infty$ . Korektní matematický výklad by však vyžadoval jednak pojmy z teorie distribucí, zejména zavedení tzv. Diracovy distribuce a Heavisidovy funkce, jednak hlubší poznatky z teorie řešení parciálních diferenciálních rovnic a jejich soustav. Z inženýrského hlediska je však nejpodstatnější, že pro případ obdobný našemu s jediným zatížením o složkách  $F_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , jež působí v počátku, je známo tzv. Boussinesqovo řešení

$$u_i = \frac{1}{4\pi\lambda_2} \sum_{k=1}^3 G_{ik} F_k \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

kde

$$\begin{aligned} G_{11} &= b/r + x_1^2/r^3 - ax_1^2/(r(r+x_3)^2) - ax_3/(r(r+x_3)), \\ G_{12} &= x_1x_2/r^3 - ax_1x_2/(r(r+x_3)^2), \\ G_{13} &= x_1x_3/r^3 - ax_1/(r(r+x_3)), \\ G_{22} &= b/r + x_2^2/r^3 - ax_2^2/(r(r+x_3)^2) - ax_3/(r(r+x_3)), \\ G_{23} &= x_2x_3/r^3 - ax_2/(r(r+x_3)), \\ G_{33} &= b/r + x_3^2/r^3, \end{aligned}$$

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  a  $G_{ij} = G_{ji}$  pro všechna  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

Vzhledem k symetrii a linearitě úlohy (tj. k aditivnosti a homogenosti příslušného diferenciálního operátoru, jenž v inženýrské mechanice odpovídá principům úměrnosti a superpozice účinků) je  $u_1(0, 0, h) = u_2(0, 0, h) = 0$ . Můžeme tedy zvolit  $x_1 = x_3 = h, x_2 = 0, F_1 = F_2 = 0$  a čtyřikrát  $F_3 = P$  a dopočítat pouze  $r = h\sqrt{2}$  a hledaný pokles

$$u_3(0, 0, h) = \frac{P}{\pi\lambda_2} G_{33}(h, 0, h) = \frac{P}{\pi\lambda_2} \left( \frac{b}{h\sqrt{2}} + \frac{h^2}{2\sqrt{2}h^3} \right)$$

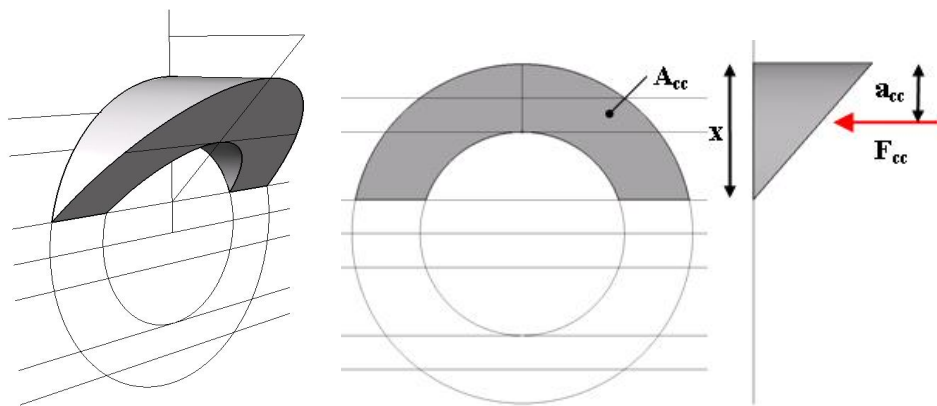
$$= \frac{b + \frac{1}{2}}{2\sqrt{2}\lambda_2} \cdot \frac{P}{\pi h} = \frac{(5 - 4\mu)(1 + \mu)P}{4\sqrt{2}\pi Eh}.$$

## 2.7 Objem a těžiště tlačené plochy betonu



Při dimenzování betonových konstrukcí se setkáváme s problematikou určení velikosti síly  $F_{cc}$  v tlačené oblasti betonového průřezu. Tato síla se stanovuje např. pro tzv. mezní stav použitelnosti za předpokladu lineárního rozdělení napětí  $\sigma_c$ . V řešení je nutno znát polohu tzv. neutrálné (nulové) osy  $x$ , tj. osy s nulovým poměrným přetvořením  $\varepsilon_c$ . Tato poloha se získá řešením podmínek rovnováhy vnějších a vnitřních sil (sílová a momentová podmínka rovnováhy) a to buď přímo a nebo iteračně. V tomto procesu se právě vyskytuje problém určení síly  $F_{cc}$  jako objemu napětí  $\sigma_c$  na ploše tlačného betonu  $A_{cc}$ , jejíž obrazec může mít i zcela obecný tvar, a v neposlední řadě také určení polohy síly  $F_{cc}$  v tlačené ploše průřezu  $a_{cc}$ , jako těžiště objemu napětí  $\sigma_c$ .

Příkladem pro řešení je zvolen průřez tvaru mezikruží.



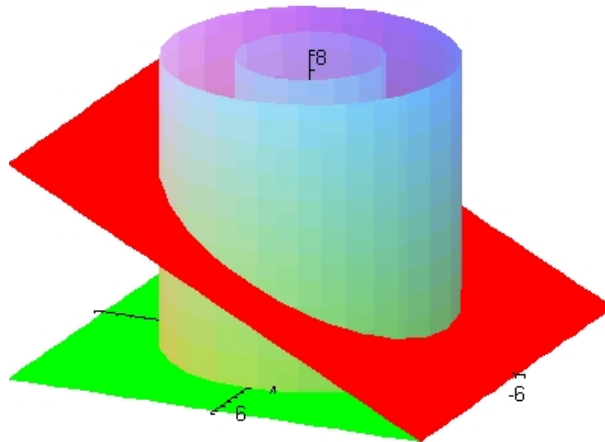
**Řešení:**

Objekt můžeme umístit do souřadnicové soustavy tak, aby byla

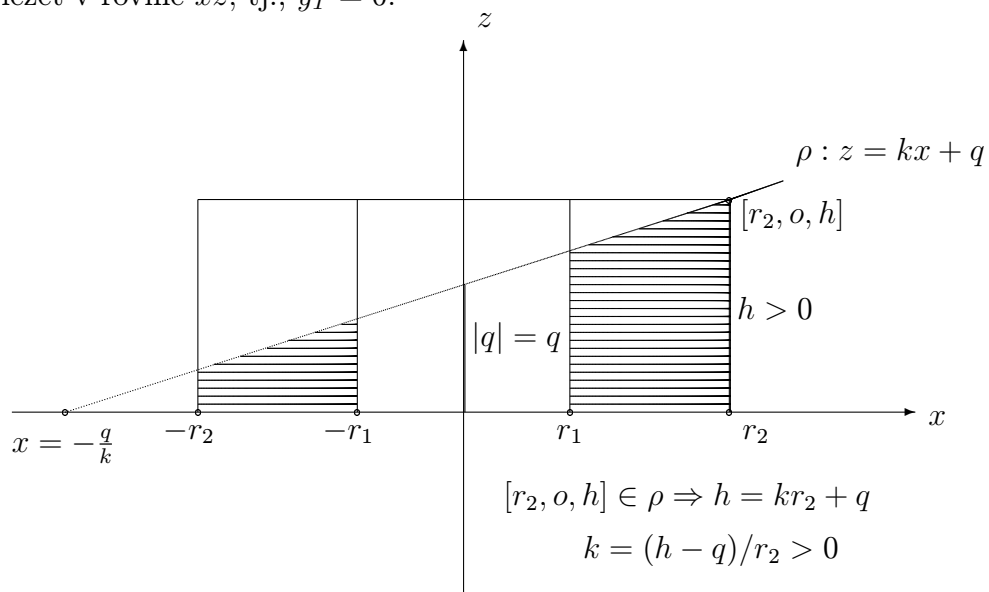
- rovina řezu rovnoběžná například se souřadnicovou osou  $y$ ,
- osou skruže osa  $z$

tj.,

$$r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2, \quad 0 \leq z \leq kx + q.$$



Řezná rovina procházející bodem  $[r_2, 0, h]$  pak bude mít rovnici  $z = kx + q$ ,  $k > 0$  a protne rovinu  $xy$  v přímce  $x = -q/k$ . Těžiště  $T$  homogenního tělesa bude ležet v rovině  $xz$ , tj.,  $y_T = 0$ .



Vyšetříme čtyři případy řezů:

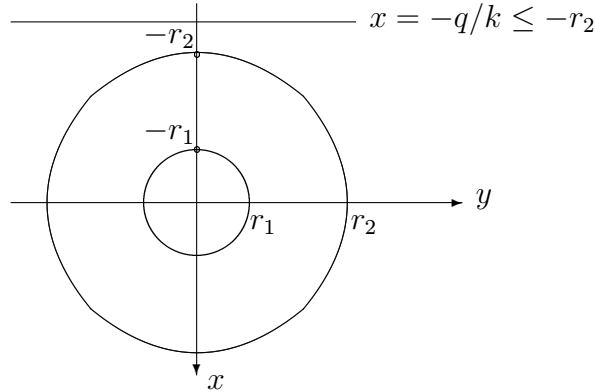
- (A)  $-q/k < -r_2$ ,      (B)  $r_1 \leq -q/k < r_2$ ,
- (C)  $-r_2 \leq -q/k \leq -r_1$ ,      (D)  $-r_1 \leq -q/k \leq r_1$ .



(A) Příklad

$$-q/k < -r_2 \Leftrightarrow q \geq kr_2 = h - q \Leftrightarrow q > \frac{h}{2}, \quad q \leq h$$

je nejjednodušší, protože obor integrace zahrnuje celé mezikruží a můžeme použít cylindrické souřadnice.



Hustota homogenního tělesa je  $\rho(x, y, z) \equiv c$  a bez újmy na obecnosti můžeme položit  $c = 1$ .

Integrační obor

$$\Omega : \quad r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2, \quad 0 \leq z \leq kx + q$$

se transformačními vztahy

$$\begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \\ \hline |J(\rho, \varphi)| = \rho \end{array}$$

změní na obor

$$\Omega_1 : \quad r_1 \leq \rho \leq r_2, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq k\rho \cos \varphi + q.$$

Pak hmotnost (číslně také objem)

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega_1} |J(\rho, \varphi)| d\rho d\varphi dz = \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \rho d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{k\rho \cos \varphi + q} dz = q\pi \cdot (r_2^2 - r_1^2), \end{aligned}$$

statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám

$$S_{yz}(\Omega) = \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \frac{1}{4} k\pi \cdot (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2),$$

$$S_{xz}(\Omega) = \iiint_{\Omega} y \, dx dy dz = 0,$$

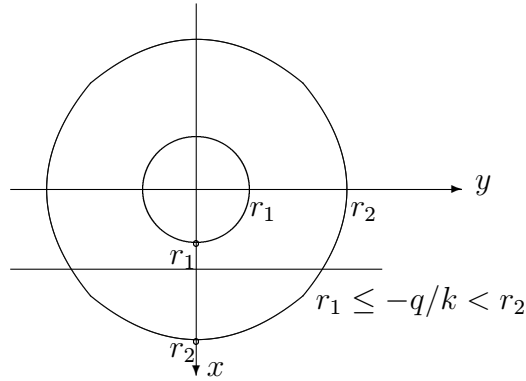
$$S_{xy}(\Omega) = \iiint_{\Omega} z \, dx dy dz = \frac{\pi}{8} \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot (k^2(r_1^2 + r_2^2) + 4q^2).$$

Hledané těžiště má proto souřadnice

$$T = \left[ \frac{S_{yz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)} \right] = \left[ \frac{k}{4q}(r_1^2 + r_2^2), 0, \frac{k^2}{8q}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{q}{2} \right]$$

pro  $q/k \geq r_2$  (tj.,  $q > h/2$ ).

(B) Vyšetříme případ  $r_1 \leq -q/k < r_2$ .



Pro konstantu  $a > 0$  nejprve definujme funkce  $F_0, F_1, F_2$ , které nám umožní jednoduché zápisy výsledků integrování:

$$F_0(x, a) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arctg \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (+const = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx),$$

$$F_1(x, a) = -\frac{1}{3}(\sqrt{a^2 - x^2})^3 \quad (+const = \int x\sqrt{a^2 - x^2} \, dx),$$

$$F_2(x, a) = -\frac{1}{4}x(\sqrt{a^2 - x^2})^3 + \frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{8}a^4 \arctg \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (+const = \int x^2\sqrt{a^2 - x^2} \, dx).$$

(2.1)

Pak jsou splněny podmínky

$$\begin{aligned} F_0(-x, a) &= -F_0(x, a), & F_0(a, a) &= \frac{1}{4}\pi a^2 = -F_0(-a, a), \\ F_1(-x, a) &= F_1(x, a), & F_1(a, a) &= 0 = F_1(-a, a), \\ F_2(-x, a) &= -F_2(x, a), & F_2(a, a) &= \frac{1}{16}\pi a^4 = -F_2(-a, a). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Integrační obor je nyní

$$\Omega : \quad -\frac{q}{k} \leq x \leq r_2, \quad -\sqrt{r_2^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r_2^2 - x^2}, \quad 0 \leq z \leq kx + q.$$

Postupně počítáme

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_{-q/k}^{r_2} dx \int_{-\sqrt{r_2^2-x^2}}^{\sqrt{r_2^2-x^2}} dy \int_0^{kx+q} dz = \\ &= 2 \int_{-q/k}^{r_2} (kx+q) \sqrt{r_2^2-x^2} dx = [2kF_1(x, r_2) + 2qF_0(x, r_2)]_{-q/k}^{r_2} = \\ &= \frac{1}{2} \pi q r_2^2 - 2kF_1\left(\frac{q}{k}, r_2\right) + 2qF_0\left(\frac{q}{k}, r_2\right), \end{aligned}$$

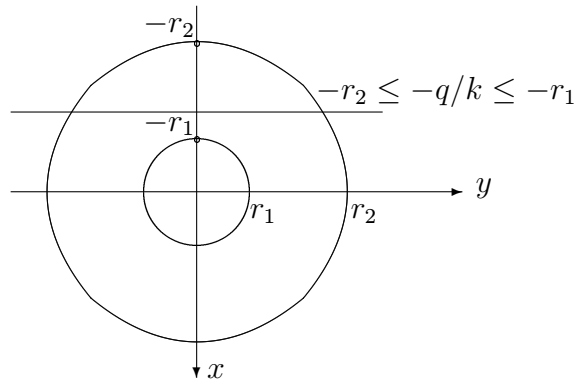
$$\begin{aligned} S_{yz}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} x dx dy dz = 2 \int_{-q/k}^{r_2} x(kx+q) \sqrt{r_2^2-x^2} dx = \\ &= [2kF_2(x, r_2) + 2qF_1(x, r_2)]_{-q/k}^{r_2} = \frac{1}{8} k \pi r_2^4 + 2kF_2\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - 2qF_1\left(\frac{q}{k}, r_2\right), \end{aligned}$$

$$S_{xz}(\Omega) = \iiint_{\Omega} y dx dy dz = 0,$$

$$\begin{aligned} S_{xy}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_{-q/k}^{r_2} (kx^2 + 2kqx + q^2) \sqrt{r_2^2-x^2} dx = \\ &= [k^2 F_2(x, r_2) + 2kq F_1(x, r_2) + q^2 F_0(x, r_2)]_{-q/k}^{r_2} = \\ &= \frac{1}{16} \pi r_2^2 (k^2 r_2^2 + 4q^2) + q^2 F_0\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - 2kq F_1\left(\frac{q}{k}, r_2\right) + k^2 F_2\left(\frac{q}{k}, r_2\right). \end{aligned}$$

Pro určení souřadnic těžiště je potřebné použít v tomto i následujících případech vhodné programové prostředky, plně postačující je i program Excel.

- (C) Příklad  $-r_2 \leq -q/k \leq -r_1$  můžeme řešit kombinací předcházejících postupů, když použijeme rozdíl integrálů.



Integrační obor  $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ , kde

$$\Omega_1: \quad r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2, \quad 0 \leq z \leq kx + q,$$

$$\Omega_2: \quad -r_2 \leq x \leq -\frac{q}{k}, \quad -\sqrt{r_2^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r_2^2 - x^2}, \quad 0 \leq z \leq kx + q.$$

Pak

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= m(\Omega_1) - \iiint_{\Omega_2} dx dy dz = \\ &= q\pi(r_2^2 - r_1^2) + [2kF_1(x, r_2) + 2qF_0(x, r_2)]_{-q/k}^{-r_2} = \\ &= q\pi(r_2^2 - r_1^2) - \frac{1}{2}q\pi r_2^2 + 2qF_0\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - 2kF_1\left(\frac{q}{k}, r_2\right) \end{aligned}$$

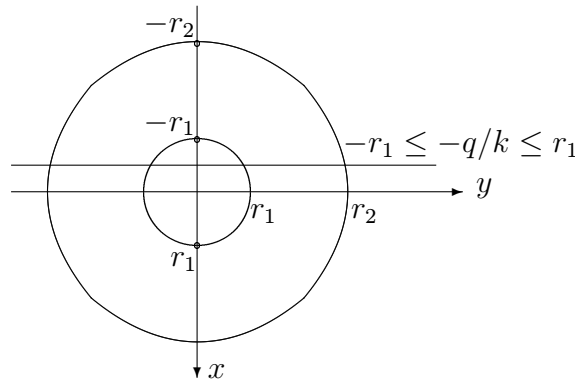
a analogicky

$$\begin{aligned} S_{yz}(\Omega) &= \frac{1}{4}k\pi \cdot (r_2^4 - r_1^4) + [2kF_2(x, r_2) + 2qF_1(x, r_2)]_{-q/k}^{-r_2} = \\ &= \frac{1}{4}k\pi \cdot (r_2^4 - r_1^4) - \frac{1}{8}k\pi r_2^4 + 2kF_2\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - 2qF_1\left(\frac{q}{k}, r_2\right), \end{aligned}$$

$$S_{xz}(\Omega) = 0,$$

$$\begin{aligned} S_{xy}(\Omega) &= \frac{\pi}{8} \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot (k^2(r_1^2 + r_2^2) + 4q^2) + \\ &+ [k^2F_2(x, r_2) + 2kqF_1(x, r_2) + q^2F_0(x, r_2)]_{-q/k}^{-r_2} = \\ &= \frac{\pi}{8} \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot (k^2(r_1^2 + r_2^2) + 4q^2) - \frac{1}{16}\pi k^2 r_2^4 - \frac{1}{4}\pi q^2 r_2^2 + \\ &+ k^2F_2\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - 2kqF_1\left(\frac{q}{k}, r_2\right) + q^2F_0\left(\frac{q}{k}, r_2\right). \end{aligned}$$

(D) Poslední případ  $-r_1 \leq -q/k \leq r_1$



vyřešíme integrací přes obor  $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ , kde

$$\Omega_1 : \quad -\frac{q}{k} \leq x \leq r_2, \quad -\sqrt{r_2^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r_2^2 - x^2}, \quad 0 \leq z \leq kx + q,$$

$$\Omega_2 : \quad -\frac{q}{k} \leq x \leq r_1, \quad -\sqrt{r_2^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r_2^2 - x^2}, \quad 0 \leq z \leq kx + q,$$

s následujícími výsledky:

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \iiint_{\Omega_1} dx dy dz - \iiint_{\Omega_2} dx dy dz = \\ &= 2 \int_{-q/k}^{r_2} (kx + q) \sqrt{r_2^2 - x^2} dx - 2 \int_{-q/k}^{r_1} (kx + q) \sqrt{r_2^2 - x^2} dx = \\ &= [2kF_1(x, r_2) + 2qF_0(x, r_2)]_{-q/k}^{r_2} - [2kF_1(x, r_1) + 2qF_0(x, r_1)]_{-q/k}^{r_1} = \\ &= \frac{1}{2} \pi q (r_2^2 - r_1^2) + 2q \left( F_0\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - F_0\left(\frac{q}{k}, r_1\right) \right) - 2k \left( F_1\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - F_1\left(\frac{q}{k}, r_1\right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{yz}(\Omega) &= [2kF_2(x, r_2) + 2qF_1(x, r_2)]_{-q/k}^{r_2} - [2kF_2(x, r_1) + 2qF_1(x, r_1)]_{-q/k}^{r_1} = \\ &= \frac{1}{8} k \pi (r_2^4 - r_1^4) + 2k \left( F_2\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - F_2\left(\frac{q}{k}, r_1\right) \right) - 2q \left( F_1\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - F_1\left(\frac{q}{k}, r_1\right) \right), \end{aligned}$$

$$S_{yz}(\Omega) = 0,$$

$$\begin{aligned} S_{xy}(\Omega) &= [k^2 F_2(x, r_2) + 2kq F_1(x, r_2) + q^2 F_0(x, r_2)]_{-q/k}^{r_2} - \\ &\quad - [k^2 F_2(x, r_1) + 2kq F_1(x, r_1) + q^2 F_0(x, r_1)]_{-q/k}^{r_1} = \\ &= \frac{1}{16} k^2 \pi (r_2^4 - r_1^4) + \frac{1}{4} \pi q^2 (r_2^2 - r_1^2) + k^2 \left( F_2\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - F_2\left(\frac{q}{k}, r_1\right) \right) - \\ &\quad - 2kq \left( F_1\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - F_1\left(\frac{q}{k}, r_1\right) \right) + q^2 \left( F_0\left(\frac{q}{k}, r_2\right) - F_0\left(\frac{q}{k}, r_1\right) \right). \end{aligned}$$

Analyzovali a popsali jsme potřebnými vzorci všechny případy.

## 2.8 Optimalizace betonové směsi podle Féreta



*Sestavte návod pro co nejúspornější návrh složení betonové směsi pro sloup z prostého betonu konstantního průřezu předepsané výšky  $l$ , jenž je osově namáhán celkovou tlakovou silou  $N$ , znáte-li místní gravitační zrychlení  $g$ . Pro výpočet pevnosti použijte empirický Féretův vztah se známou pevnostní konstantou. Uvažujte přitom, že hustota betonu závisí lineárně na pevnosti. Jsou známy cena objemové jednotky cementu  $\alpha$  a cena objemové jednotky kameniva (zprůměrovaná pro všechny frakce používané ve stálém poměru)  $\beta$ ; cenu vody a vzduchu zanedbejte. Jsou předepsány meze  $c_1$  a  $c_2$  ( $0 < c_1 < c_2 < 1$ ) pro obsah cementu v objemové jednotce směsi a meze  $\nu_1$  a  $\nu_2$  ( $0 < \nu_1 < \nu_2$ ) pro podíl obsahu vody a cementu v objemové jednotce směsi, které musejí vždy zaručovat, že sloup přenes více než vlastní tíhu.*

**Řešení:** Označme postupně  $c$ ,  $s$  a  $w$  čísla z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , která udávají obsah cementu, kameniva a vody (včetně vodní páry a případných dalších plynů) v objemové jednotce směsi; nutně je  $c + s + w = 1$ . Cena směsi na jednotku výšky sloupu je

$$P = (\alpha c + \beta s)A,$$

(celková cena směsi je tedy  $Pl$ ), kde  $A$  je (předem neznámý) obsah průřezu sloupu. Tlakové napětí ve sloupu  $\sigma$  se mění lineárně po jeho výšce; zřejmě platí

$$\frac{N}{A} \leq \sigma \leq \frac{N}{A} + \rho gl.$$

Označme  $\nu = w/c$ . Znajíce kladnou pevnostní konstantu  $\psi$ , můžeme podle Féreta vypočítat výslednou pevnost betonu v tlaku

$$\kappa = \frac{\psi}{(1 + \nu)^2}.$$

Obecně požadujeme  $\sigma \leq \kappa$ ; nejúspornější je tedy zvolit

$$\kappa = \frac{N}{A} + \rho gl.$$

Poněvadž známe lineární závislost  $\rho$  na  $\kappa$ , můžeme úsporně psát

$$\rho gl = \gamma_0 + \gamma_1 \kappa,$$

kde  $\gamma_0$  a  $\gamma_1$  jsou známé konstanty, v praxi vždy nezáporné. K tomu, aby sloup přenesl více než vlastní tíhu, musí být  $\kappa > gl\rho$ , a tedy

$$\frac{(1 - \gamma_1)\psi}{N(1 + \nu_2)^2} - \frac{\gamma_0}{N} > 0;$$

zřejmě potom  $\gamma_1 < 1$  a pro označení

$$\lambda_0 = \frac{\gamma_0}{N}, \quad \lambda_1 = \frac{(1 - \gamma_1)\psi}{N}$$

též

$$\lambda_0 \leq \frac{\lambda_1}{(1 + \nu_2)^2}$$

s jednoduchým důsledkem  $\lambda_0 < \lambda_1$ .

Pro skutečné zatížení dostáváme

$$\frac{N}{A} = \frac{\psi}{(1 + \nu)^2} - \rho gl = \frac{\psi}{(1 + \nu)^2} - \rho gl = \frac{(1 - \gamma_1)\psi}{(1 + \nu)^2} - \gamma_0,$$

z čehož vyplývá

$$A = N \left( \frac{(1 - \gamma_1)\psi}{(1 + \nu)^2} - \gamma_0 \right)^{-1} = \left( \frac{\lambda_1}{(1 + \nu)^2} - \lambda_0 \right)^{-1}.$$

Poněvadž  $s = 1 - c - w$  a  $w = c\nu$ , obdržíme konečně

$$P = (\alpha c + \beta s)Q^{-1} = (\beta + (\alpha - \beta)c - \beta c\nu)Q^{-1},$$

kde stručně označujeme

$$Q = \frac{\lambda_1}{(1 + \nu)^2} - \lambda_0,$$

jako funkci dvou proměnných  $c$  a  $\nu$  na množině  $\Omega = \langle c_1, c_2 \rangle \times \langle \nu_1, \nu_2 \rangle$ . Její parciální derivace  $\partial P/\partial c$  a  $\partial P/\partial \nu$  lze zapsat ve (pro další úvahy vhodně uspořádaném) tvaru

$$\begin{aligned} Q \partial P/\partial c &= \alpha - \beta - \beta \nu, \\ \frac{Q(1 + \nu^3)}{\beta} \partial P/\partial \nu &= \left( \lambda_0 \nu^3 + 3\lambda_0 \nu^2 + 3(\lambda_0 - \lambda_1)\nu + (\lambda_0 - 3\lambda_1 + 2\lambda_1 \frac{\alpha}{\beta}) \right) c \\ &\quad + 2\lambda_1. \end{aligned}$$

Položíme-li  $\partial P/\partial c = 0$ , můžeme z první rovnice snadno vypočítat  $c$ , a položíme-li i  $\partial P/\partial \nu = 0$ , můžeme z první rovnice snadno vypočítat také  $\nu$ . Funkce  $P$  má tedy jediný stacionární bod  $A_* = [c_*, \nu_*]$  (pokud vůbec padne na  $\Omega$ )

$$c_* = \frac{2\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1(2\xi - 3) + 3(\lambda_1 - \lambda_0)(\xi - 1) - 3\lambda_0(\xi - 1)^2(\xi + 2)},$$

$$\nu_* = \xi - 1.$$

Získaný stacionární bod  $A_* = [c_*, \nu_*]$  nemusí být nicméně absolutním mimem funkce  $P$ . Zvlášť je třeba vyšetřit vrcholy  $A_1 = [c_1, \nu_1]$ ,  $A_2 = [c_1, \nu_2]$ ,  $A_3 = [c_2, \nu_1]$ ,  $A_4 = [c_2, \nu_2]$  a stacionární body úseček  $A_1A_2$  a  $A_3A_4$ ; na úsečkách

$A_2A_3$  a  $A_1A_4$  je totiž  $P$  pouze lineární funkcí  $c$ . Netriviální je jediné analýza průběhu  $P$  pro  $c = c_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , kde vychází

$$(\lambda_0\nu^3 + 3\lambda_0\nu^2 + 3(\lambda_0 - \lambda_1)\nu + \lambda_0 - 3\lambda_1 + 2\lambda_1\xi) c_i + 2\lambda_1 = 0,$$

což je kubická algebraická rovnice, z níž máme vypočítat (jedno až tři) řešení  $\nu$ . Ve speciálním případě  $\lambda_0 = 0$  (tj.  $\gamma_0 = 0$ ) dostáváme přímo jediné možné řešení

$$\nu_{i*} = \frac{2}{c_i} - 3 + 2\xi;$$

dále tedy můžeme pracovat s  $\lambda_0 > 0$ , což nám umožní zavést korektně označení  $\eta = \lambda_1/\lambda_0$  a uvedenou kubickou rovnici přepsat do tvaru

$$\nu^3 + 3\nu^2 + 3(1 - \eta)\nu + 1 - 3\eta + 2\eta\xi + \frac{\xi}{c_i} = 0.$$

Substitucí  $\mu = \nu - 1$  odtud obdržíme

$$\mu^3 - 3\eta\mu + 2\eta\left(\xi + \frac{1}{c_i}\right) = 0.$$

Tři možná řešení (některá nemusí být reálná, případně nemusí patřit intervalu  $\langle \nu_1, \nu_2 \rangle$ ) podle Cardanových vzorců jsou  $\mu_{i*} = u + v$ ,  $\mu_{i*} = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v$  nebo  $\mu_{i*} = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v$ , kde vždy

$$u = \sqrt{-q + \sqrt{q^2 - \eta^3}}, \quad v = \sqrt{-q - \sqrt{q^2 - \eta^3}}, \quad q = \eta\left(\xi + \frac{1}{c_i}\right),$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

na závěr stačí dopočítat  $\nu_{i*} = \mu_{i*} + 1$ . Výběr řešení je nicméně omezen: z teorie Cardanových vzorců například vyplývá, že součet tří reálných řešení by musel být roven  $-3$  (tj. koeficientu u  $\nu^2$  v původní rovnici), což není pro  $\nu \geq \nu_1 > 0$  možné. Označme proto jen pro každé  $i \in \{1, 2\}$  jen  $A_{i*}^1$  a  $A_{i*}^2$  jako dva možné stacionární body  $[u_{i*}, \nu_{i*}]$ .

Vyšetřování charakteru stacionárních bodů pomocí druhých (případně i vyšších) derivací  $P$  by bylo pracné a není v tomto případě nezbytné. Stačí totiž prověřit hodnoty  $P(A)$  v bodech

$$A \in \{A_*, A_{1*}^1, A_{1*}^2, A_{2*}^1, A_{2*}^2, A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

a vyhledat nejmenší z nich (což obecně nemusí být jednoznačné). Takový bod  $A = [c, \nu]$  pak odpovídá nejúspornějšímu návrhu směsi, určenému trojicí hodnot

$$(c, s, w) = (c, 1 - c(\nu + 1), c\nu).$$



## 2.9 Vlastní kmitání stožáru



Na základě Kirchhoffovy teorie odhadněte průhyb vrcholu dokonale vetknutého štíhlého kovového stožáru výšky  $l$  konstantního průřezu o obsahu  $A$  při netlumeném příčném kmitání, které bylo vyvoláno náhlým odtížením stožáru, na jehož vrchol předtím staticky působilo příčné břemeno  $P$ . Jsou známy kladný modul pružnosti materiálu  $E$ , hustota materiálu  $\rho$  a moment setvačnosti  $J$ . Použijte metodu konečných prvků s ekvidistantním dělením výšky  $l$ ; přibližný výpočet proveďte pro 4 dílky.

Řešení: Označme  $w(x, t)$  průhyb stožáru pro  $x \in \langle 0, l \rangle$  a  $t \geq 0$ , přičemž ve vetknutí musí být  $w(0, t) = 0$  a  $w'(0, t) = 0$ . Podle Kirchhoffovy teorie lze podmínku rovnováhy psát ve tvaru

$$\rho A \ddot{w} + EJ w'''' = 0;$$

čárkami označujeme derivace podle  $x$ , tečkami podle  $t$ . Pro určení počáteční výchylky stožáru stačí nicméně uvažovat  $w$  pouze v závislosti na  $x$  a použít vztah

$$M = -EJ w'' ,$$

jelikož jde o staticky určitý nosník se známým ohybovým momentem

$$M = P(x - l) .$$

Speciálně pro  $P = 0$  je zřejmě všude  $w_* = 0$  a žádné kmitání nedostaneme. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat  $P > 0$ ; pro  $P < 0$  bychom totiž dostali stejné  $w$  jako pro  $-P$ , jenže s opačným znaménkem.

Označme

$$\alpha = \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} , \quad \beta = \frac{P}{6EJ} .$$

Přímou integrací rovnice

$$w'' = -6\beta(x - l)$$

dostaneme postupně

$$w' = -3\beta(x - l)^2 + C_1 , \quad w = -\beta(x - l)^3 + C_1(x - l) + C_0 ,$$

kde konstanty  $C_1$  a  $C_0$  určíme postupně z okrajových podmínek ve vetknutí  $w'(0) = 0$  a  $w(0) = 0$  s výsledkem

$$C_1 = 3\beta l^2 , \quad C_0 = 2\beta l^3 .$$

Máme tedy

$$w = \beta (2l^3 - 3l^2(l - x) + (l - x)^3) = \beta x^2(3l - x);$$

tuto statickou výchylku budeme (na rozdíl od obecně dynamické výchylky  $w$ ) nadále označovat  $w_0$ . Zřejmě pak platí  $w_0(x) = w(x, 0)$  pro libovolný bod  $x$  a původní podmínku rovnováhy je možné psát jako

$$\ddot{w} = -\alpha^2 w''''.$$

Řešení této parciální diferenciální rovnice budeme hledat ve tvaru

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \psi_i(t)$$

pro dostatečně velké  $n$  (teoreticky  $n \rightarrow \infty$ ) a pro vhodnou soustavu testovacích funkcí  $\varphi_i$  na  $\langle 0, l \rangle$  vlastností  $\varphi_i(0) = 0$  a  $\varphi_i'(0) = 0$ ; funkce  $\psi_i$  na  $\langle 0, \infty \rangle$  vždy dopočítáme z jisté soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Označíme-li

$$(v, u) = \int_0^l v(x)u(x) dx, \quad [v, u] = v(l)u(l) - v(0)u(0),$$

přičemž  $v \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  a  $u$  je funkce proměnné  $x$ , jež může mimoto záviset i na čase, obdržíme postupně integrací per partes

$$\begin{aligned} (v, \ddot{w}) &= -\alpha^2 (v, w''''') = \alpha^2 (v', w''''') - \alpha^2 [v, w'''''] \\ &= -\alpha^2 (v'', w''') - \alpha^2 [v, w'''''] + \alpha^2 [v', w''']. \end{aligned}$$

Poněvadž však  $v(0) = 0$ ,  $v'(0) = 0$ ,  $w''(0)$  je úměrné ohybovému momentu na volném konci nezátíženého stožáru a  $w'''(0)$  je úměrné posouvající síle tamtéž, takže též  $w''(0) = 0$  a  $w'''(0) = 0$ , máme jen

$$(v, \ddot{w}) = -\alpha^2 (v'', w''').$$

Volíme-li nyní postupně  $v = \varphi_j$  pro  $j \in \{1, \dots, n\}$ , vychází

$$\sum_{i=1}^n (\varphi_j, \varphi_i) \ddot{\psi}_i = \alpha^2 \sum_{i=1}^n (\varphi_j'', \varphi_i'') \psi_i,$$

což lze úsporně zapsat v maticovém tvaru

$$M \ddot{\psi} = -\alpha^2 K \psi,$$

kde tzv. matice hmotnosti  $M$  sestává z prvků  $(\varphi_j, \varphi_i)$  a tzv. matice tuhosti  $K$  z prvků  $(\varphi_j'', \varphi_i'')$ ; našim úkolem je určit sloupcový vektor  $\psi$ , jenž je tvořen prvky  $\psi_i$ .

Pro sudé  $n$  rozdělme nyní interval  $\langle 0, l \rangle$  na  $n/2$  subintervalů  $\langle (j-1)h, jh \rangle$ , kde  $h = 2l/n$  a postupně  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Označme  $\xi = (x - (j-1)h)/h$  a uvažujme funkce

$$\tilde{\varphi}_L(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad \tilde{\varphi}_R(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3,$$

$$\hat{\varphi}_L(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3, \quad \hat{\varphi}_R(\xi) = -\xi^2 + \xi^3,$$

přičemž  $L = j-1$  a  $R = j$ . Tyto funkce, jež lze snadno odvodit z Newtonova tvaru Hermitova kubického interpolačního polynomu na  $\langle (j-1)h, jh \rangle$ , mají vlastnosti  $\tilde{\varphi}_L(0) = \tilde{\varphi}_R(1) = h\hat{\varphi}_L(0) = h\hat{\varphi}_L(l) = 1$ , zatímco všechny jejich ostatní hodnoty pro  $\xi \in \{0, 1\}$  jsou nulové. Pokud bychom se namísto intervalu  $\langle 0, l \rangle$  omezili na  $\langle (j-1)h, jh \rangle$  dostali bychom (sice pracně, leč jen se znalostí integrace polynomů)

$$M = \frac{h}{420} \begin{bmatrix} M_1 & M_0 \\ M_0^T & M_2 \end{bmatrix}, \quad K = \frac{2}{h^3} \begin{bmatrix} K_1 & K_0 \\ K_0^T & K_2 \end{bmatrix},$$

kde

$$M_1 = \begin{bmatrix} 156 & 22 \\ 22 & 4 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 156 & -22 \\ -22 & 4 \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} 54 & -13 \\ 13 & -3 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(v součtech  $M_1 + M_2$  a  $K_1 + K_2$  vymizí nediagonální členy).

Pro  $x \in \langle (j-1)h, jh \rangle$  zřejmě platí pro sudé  $j \in \{2, \dots, n\}$

$$\varphi_{j-1}(\xi) = \tilde{\varphi}_R(\xi), \quad \varphi_j(\xi) = h\hat{\varphi}_R(\xi)$$

a pro  $x \in \langle jh, (j+1)h \rangle$ , pokud  $j < n$ , obdobně

$$\varphi_{j-1}(\xi - 1) = \tilde{\varphi}_L(\xi - 1), \quad \varphi_j(\xi - 1) = h\hat{\varphi}_L(\xi - 1);$$

v obou případech pak je

$$w_0(\xi) = h^3(\xi - s + 1)^2 \left( \frac{3l}{h} - \xi + s - 1 \right) = h^3(\xi - s + 1)^2 \left( \frac{n}{2} - \xi + s - 1 \right).$$

Zobecněním tohoto postupu obdržíme pásové matice

$$M = \frac{h}{420} \begin{bmatrix} M_1 & M_0 & & & \\ M_0^T & M_1 + M_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & M_1 + M_2 & M_0 \\ & & & M_0^T & M_2 \end{bmatrix},$$

$$K = \frac{2}{h^3} \begin{bmatrix} K_1 & K_0 & & & \\ K_0^T & K_1 + K_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & K_1 + K_2 & K_0 \\ & & & K_0^T & K_2 \end{bmatrix}$$

pro odpovídající vektor  $\varphi$  o  $2n$  prvcích.

Vektor  $\psi$  budeme nyní hledat ve tvaru

$$\psi(t) = VE_1(t)a + VE_2(t)b,$$

kde  $a$  a  $b$  jsou sloupcové vektory zatím neznámých konstant,  $\Lambda t$  je diagonální čtvercová a  $V$  čtvercová matice řádu  $n$ ,  $E_1(t)$  a  $E_2(t)$  jsou matice řádu  $n$  sestávající postupně z diagonálních členů  $\cos(\Lambda_{ii}t)$  a  $\sin(\Lambda_{ii}t)$  pro  $i \in \{1, \dots, n\}$  a platí

$$MV\Lambda^2 = \alpha^2KV,$$

tj.  $V$  je matice vlastních vektorů matice  $M^{-1}K$  a  $\Lambda^2$  je matice vlastních čísel téže matice. Zřejmě je totiž

$$\dot{\psi}(t) = V\Lambda E_1(t)a + V\Lambda E_2(t)b, \quad \ddot{\psi}(t) = -V\Lambda^2 E_1(t)a - V\Lambda^2 E_2(t)b,$$

takže

$$MV\Lambda^2 E_1(t)a + MV\Lambda^2 E_2(t)b = KV E_1(t)a + KV E_2(t)b.$$

Podle charakteru úlohy můžeme navíc očekávat  $\Lambda_{ii}^2 > 0$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$ , a lze tedy volit rovněž  $\Lambda_{ii} > 0$ , čímž se vyhneme práci s komplexními čísly; důkladná kvalitativní analýza nicméně přesahuje možnosti tohoto textu. Totéž je třeba poznamenat o efektivním numerickém algoritmu pro stanovení  $V$  a  $\Lambda^2$ : i když matice  $M$  a  $K$  jsou pásové, matice  $V$  je obecně plná, navíc se pracuje i s inverzní maticí  $V^{-1}$ ; u malého  $n$  lze nicméně vystačit například s postupně opakovanou mocninnou metodou. V tomto příkladu (viz dále) byla pro numerické vyčíslení  $V$  a  $\Lambda^2$  použita funkce `eig` z MATLABu.

Označme ještě  $f$  sloupcový vektor sestavený z prvků  $(\varphi_j, w_0)$  pro  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Poněvadž  $E_1(0)$  a  $E_2(0)$  jsou nulové matice, platí

$$\psi(0) = V(a + b), \quad \dot{\psi}(0) = V(b - a);$$

současně však platí  $M\psi(0) = f$  a  $\dot{\psi}(0)$  musí být nulový vektor, a tak dostáváme

$$a = b = \frac{1}{2}M^{-1}V^{-1}f.$$

Označíme-li  $E = (E_1 + E_2)/2$ , vychází tedy

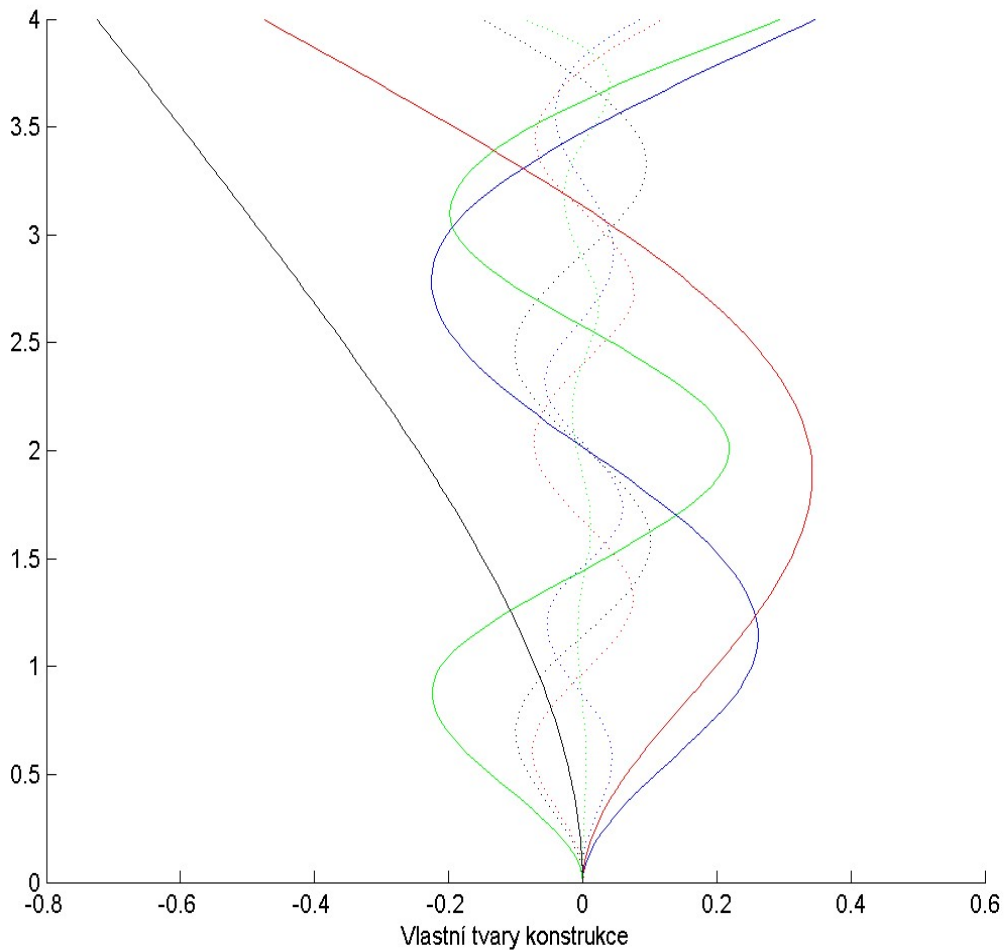
$$\psi(t) = VE(t)V^{-1}M^{-1}f$$

a konečně

$$w(x, t) = \varphi^T(x)VE(t)V^{-1}M^{-1}f.$$

Pro numerický výpočet označme ještě  $\bar{M} = 420M/h$  a  $\bar{K} = Kh^3/2$ . Potom  $V\Lambda^2 = 210h^2\bar{M}^{-1}\bar{K}V$ . Matici vlastních vektorů  $V$  lze určit pro matici  $\bar{M}^{-1}\bar{K}$





Řešení úlohy je zjevně periodické, což neodpovídá reálnému pozorování, kdy se již nezátžený stožár časem vrátí do původní polohy. Důvodem je idealizace stožáru jako uzavřeného systému, který nekomunikuje s okolím; ve skutečnosti dochází (kromě do modelu zahrnuté potenciální a kinetické energie) k disipaci energie do okolního prostředí, zejména její přeměně na tepelnou vlivem tření o okolní vzduch. Za nejjednoduššího předpokladu tzv. proporcionálního tlumení lze člen  $M\ddot{\psi}$  nahradit členem  $M\ddot{\psi} + \zeta M\dot{\psi}$ , kde  $\zeta$  je kladná konstanta, a vynutit tak postupné utlumení pohybu; realističtější modely pracují se složitějšími, většinou nelineárními členy.

## 2.10 Přebodnicový oblouk v trase komunikace

*Navrhněte přebodnicový oblouk v trase komunikace, přechází-li trasa z přímky do kruhového oblouku, znáte-li vzdálenost přímky od kruhového oblouku  $h$  a jeho*



poloměr  $r$ . Pro přechodnicový oblouk použijte kubickou parabolu. Výškové změny v trase neuvažujte.

*Řešení:* Označme  $\gamma$  hledanou přechodnici,  $\tilde{k}$  zadanou kružnici a  $p$  zadanou přímkou. Zaveďme kartézský souřadnicový systém takový, že bod  $S = [0, r]$  je středem  $k$ , bod  $A = [-l, -h]$  je průnikem  $p$  a  $\gamma$  a bod  $B = [b, r - \sqrt{r^2 - b^2}]$  je průnikem  $\tilde{k}$  a  $\gamma$ ; bod  $B$  zřejmě leží na půlkružnici  $k \subset \tilde{k}$  takové, že  $y \leq r$ . Určit máme zbývající souřadnice s neznámými parametry  $b$  a  $l$  a rovnici  $\gamma$ , jež bude obsahovat další neznámý parametr  $a$ .

Sestavme nejprve rovnice čar  $p$ ,  $k$  a  $\gamma$  ve tvaru  $y = \varphi(x)$ , kde  $\varphi$  jsou jisté reálné funkce, včetně prvních a druhých derivací, potřebných k výpočtu křivosti

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}.$$

Dostáváme tak pro  $p$

$$y = -h, \quad y' = 0, \quad y'' = 0, \quad \kappa = 0,$$

pro  $k$

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y' = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad y'' = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 - x^2)^3}}, \quad \kappa = \frac{1}{r}$$

a pro  $\gamma$

$$y + h = a(x + l)^3, \quad y' = 3a(x + l)^2, \quad y'' = 6a(x + l),$$

$$\kappa = \frac{6a(x + l)}{\sqrt{(1 + 9a^2(x + l)^4)^3}}.$$

Poněvadž v bodě  $A$  platí pro  $p$  i  $\gamma$  vždy

$$y(-l) = -h, \quad y'(-l) = 0, \quad y''(-l) = 0, \quad \kappa(-l) = 0,$$

zbývá jen zajistit spojitost  $y$ ,  $y'$  a  $\kappa$  v bodě  $B$  vhodným nastavením parametrů  $a$ ,  $b$  a  $l$ .

Podmínky spojitosti  $y$ ,  $y'$  a  $\kappa$  v bodě  $B$ , vycházející z rovnic  $\gamma$  a  $k$ , jsou postupně

$$a(b + l)^3 = h + r - \sqrt{r^2 - b^2}, \quad 3a(b + l)^2 = \frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}},$$

$$\frac{6a(b + l)}{\sqrt{(1 + 9a^2(b + l)^4)^3}} = \frac{1}{r}.$$

Z první podmínky můžeme vyjádřit

$$a = \frac{h + r - \sqrt{r^2 - b^2}}{(b + l)^3},$$

srovnáním první a druhé podmínky pak také

$$l = \frac{3\sqrt{r^2 - b^2} (h + b - \sqrt{r^2 - b^2})}{b} - b.$$

Teoreticky můžeme již tedy vyjádřit  $l$  a  $a$  pomocí  $b$ . Následně je však třeba vypočítat  $b$  ze třetí podmínky, kterou lze zapsat ve tvaru

$$36a^2(b + l)^2r^2 = (1 + 9a^2(b + l)^4)^3.$$

Tím dostáváme jedinou rovnici pro poslední neznámý parametr  $b$ , která je však značně komplikovaná, takže její přesné analytické řešení nedokážeme určit. Podrobnější analýzou bychom navíc zjistili, že řešení nemusí být jednoznačné, případně v reálném oboru nemusí ani existovat.

Máme-li k dispozici rozumný odhad  $b$ , můžeme nicméně pro náš konkrétní inženýrský problém hledat přibližné řešení numericky Newtonovou metodou tečen. Řešíme formálně rovnici  $f(b) = 0$ , kde

$$f(b) = 36a^2(b + l)^2r^2 - (1 + 9a^2(b + l)^4)^3$$

a  $l$  a  $a$  jsou již známé (dosti složité) funkce  $b$ . Výpočtový algoritmus, vycházející z iteračního předpisu

$$b \leftarrow b - f(b)/f'(b),$$

je zřejmý z programového kódu v MATLABu:

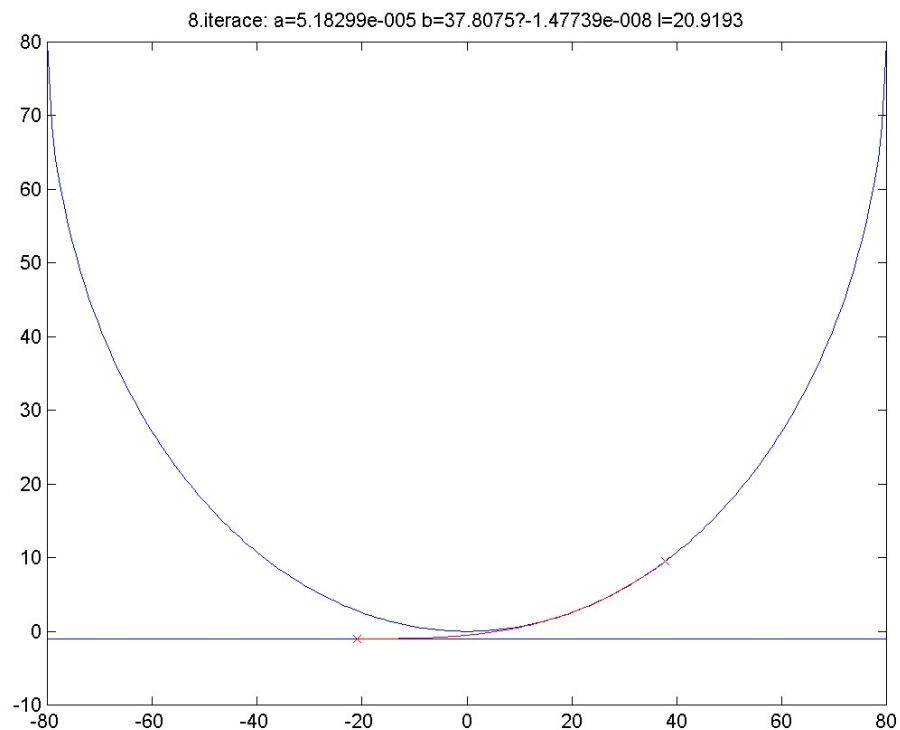
```
% cpar (C) J.V.09
% run example: rn=80;hn=1;cpar
%
syms r h b
l=3*sqrt(r^2-b^2)*(h+r-sqrt(r^2-b^2))/b-b;
a=(h+r-sqrt(r^2-b^2))/(b+1)^3;
f=36*a^2*(b+1)^2*r^2-(1+9*a^2*(b+1)^4)^3;
df=diff(f,b);
%
fil=fopen('cparf.m','w');
fprintf(fil,'fe=%s;\ndfe=%s;\n;',char(f),char(df));
fclose(fil);
%
if exist('rn','var'), r=rn; else r=80; end
if exist('hn','var'), h=hn; else h=1; end
```



```

b=r*cos(pi/4); it=0; err=Inf;
%
while abs(err)>1e-6
  if it, cparf; bn=b-fe/dfe;
  if bn<0, bn=0; elseif bn>r, bn=r; end
  err=bn-b; b=bn; end
  l=3*sqrt(r^2-b^2)*(h+r-sqrt(r^2-b^2))/b-b;
  a=(h+r-sqrt(r^2-b^2))/(b+1)^3;
%
  xa=-r:r/100:r; ya=r-sqrt(r^2-xa.^2);
  xb=[-r,r]; yb=[-h,-h];
  xi=-l:(b+1)/100:b; yi=a*(xi+1).^3-h;
  plot(xa,ya,'b',xb,yb,'b',xi,yi,'r',...
       b,r-sqrt(r^2-b^2),'rx',-l,-h,'rx');
  buf=sprintf('%d.iterace: a=%g b=%g?%g l=%g',...
             it,a,b,err,l);
  title(buf); pause
  it=it+1; end
%
print cparf.jpg -djpeg90

```



Vychází se zde z (vcelku hrubého) odhadu  $b = r/\sqrt{2}$  a toleruje se relativní chyba mezi posledními dvěma iteracemi  $b$  do  $10^{-6}$ . Derivace  $f'$  se určí formálně pomocí funkce `diff` z toolboxu `symbolic`. Během výpočtu probíhá animace jednotlivých iterací. Ukázka výstupu pro  $r = 80$  a  $h = 1$  (po osmé iteraci) je na výše uvedeném obrázku.

## 2.11 Výtok otvorem ve svislé stěně

Stanovte nejmenší možný výtok  $Q_1$  a největší možný výtok  $Q_2$  eliptickým otvorem o obsahu  $A$  ve svislé stěně, který je celý pod vodní hladinou, přičemž hlavní či vedlejší osa elipsy je svislá, působí-li na otvor i hladinu stejné tlaky a vliv přítokové rychlosti je zanedbatelný. Jsou známy výška vodní hladiny nad středem otvoru  $h$ , gravitační zrychlení  $g$ , součinitel zúžení  $\varepsilon$  a součinitel výtokové rychlosti  $\varphi$ .



Řešení: Ve svislé stěně zavedme kartézskou soustavu souřadnic  $(x, y)$  tak, že osa  $y$  je svislá a počátek souřadnic je ve středu otvoru. Eliptický otvor  $\Omega$  je v ní popsán nerovnicí

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1,$$

přičemž  $a$  a  $b$  jsou délky hlavní a vedlejší poloosy hraniční elipsy (na tom, která z nich je hlavní, nezáleží). Podle zadání musí být navíc  $A = \pi ab$  a  $b \leq h$ .

Pro výtokovou rychlost  $v$ , jež je funkcí  $y$ , platí podle zákona zachování energie (konkrétně přeměny potenciální energie v kinetickou)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{v(y)}{\varphi}\right)^2 = g(h - y),$$

což lze zapsat ve tvaru

$$v(y) = \varphi \sqrt{2g(h - y)},$$

ježž znal (pro  $\varphi = 1$ ) již J. E. Toricelli v 17. století. Celkový výtok otvorem potom je

$$Q = \int \int_{\Omega} v(y) \, dx \, dy,$$

a pro označení  $c = \varepsilon \varphi \sqrt{2g}$  tedy

$$Q = \frac{2ca}{b} \int_{-b}^b \sqrt{h - y} \sqrt{b^2 - y^2} \, dy = 2ca\sqrt{h} \int_{-b}^b \sqrt{1 - \frac{y}{h}} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \, dy.$$

Označme ještě  $\xi = b/h$ ; má-li být celý otvor pod hladinou, musí platit  $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$ . Substitucí  $y = b \cos \psi$  dostáváme

$$\begin{aligned} Q &= 2cab\sqrt{h} \int_0^\pi \sqrt{1 - \xi \cos \psi} \sin^2 \psi \, d\psi \\ &= \frac{2cA\sqrt{h}}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{1 - \xi \cos \psi} \sin^2 \psi \, d\psi. \end{aligned}$$

Tento integrál se obecně nedá nalézt v analytickém tvaru; dokonce i speciální případ kruhu  $a = b$  (čili  $A = \pi b^2$ ) vede k řešení eliptických integrálů. O jeho klesajícím průběhu v závislosti na  $\xi$  lze nicméně s podporou numerické integrace získat představu například pomocí jednoduchého cyklu v MATLABu:

```
syms psi; n=10;
for k=0:n, xi=k/n; k1=k+1;
    g=sqrt(1-xi*cos(psi))*sin(psi)^2;
    I=double(int(g,psi,0,pi));
    fprintf(1, '\nxi=%d I=%d g=%s', xi, I, char(g));
    xa(k1)=xi; ya(k1)=I; end
plot(xa,ya);
```

Výtok  $Q$  se od zde použité funkce  $g$  liší jen násobnou kladnou konstantou  $2cA\sqrt{h}/\pi$ .

Skutečnost, že  $Q$  je klesající funkcí  $\xi$ , lze prokázat i analyticky, bez numerické integrace. Funkce

$$g(\xi) = \int_0^\pi \sqrt{1 - \xi \cos \psi} \sin^2 \psi \, d\psi$$

má vzhledem k jediné proměnné  $\xi$  derivaci

$$g'(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \psi \sin^2 \psi}{\sqrt{1 - \xi \cos \psi}} \, d\psi = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \psi \sin(2\psi)}{\sqrt{1 - \xi \cos \psi}} \, d\psi.$$

Výsledný integrál můžeme formálně rozdělit na dva: první v mezích od 0 do  $\pi/2$  a druhý v mezích od  $\pi/2$  do  $\pi$ , a následně pro druhý z nich použít substituci  $\varsigma = \pi - \psi$ . Vychází tak

$$g'(\xi) = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \psi \sin(2\psi)}{\sqrt{1 - \xi \cos \psi}} \, d\psi + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \varsigma \sin(2\varsigma)}{\sqrt{1 + \xi \cos \varsigma}} \, d\varsigma.$$

Opětovným sloučením obou integrálů (už ve stejných mezích) obdržíme

$$g'(\xi) = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin \psi \sin(2\psi) \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \xi \cos \psi}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \xi \cos \psi}} \right) \, d\psi.$$

Poněvadž však všechny tři násobné členy za symbolem integrace jsou v uvedených mezích pro jakékoliv  $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$  kladné, je nutně  $g'(\xi) < 0$ , a funkce  $g$  je tedy klesající.

Nejmenšímu možnému výtoku  $Q$  zřejmě odpovídá největší přípustné  $\xi = 1$ . Dostáváme tak

$$Q_1 = \frac{2cA\sqrt{h}}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos \psi} \sin^2 \psi \, d\psi,$$

další substitucí  $\psi = 2\omega$  potom

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{4cA\sqrt{2h}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \omega \sin^2(2\omega) d\omega \\ &= \frac{16cA\sqrt{2h}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \omega \cos^2 \omega d\omega \end{aligned}$$

a poslední substitucí  $\cos \omega = t$  konečně

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{16cA\sqrt{2h}}{\pi} \int_0^1 (1-t^2) t^2 dt = \frac{16cA\sqrt{2h}}{\pi} \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{32cA\sqrt{2h}}{15\pi} \\ &\approx 0,96033740390091 cA\sqrt{h}. \end{aligned}$$

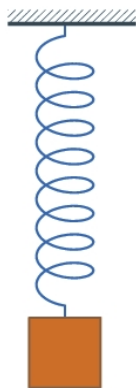
Největšímu možnému výtoku  $Q$  odpovídá naopak nejmenší přípustné  $\xi = 0$ . To se sice nedá technicky (přesně) realizovat, nicméně příslušný výsledek

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{2cA\sqrt{h}}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \psi d\psi = \frac{cA\sqrt{h}}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos(2\psi)) d\psi \\ &= \frac{cA\sqrt{h}}{\pi} \left[ \psi + \frac{1}{2} \sin(2\psi) \right]_0^\pi = cA\sqrt{h} \end{aligned}$$

se shoduje se známým hydraulickým vzorcem pro výtok malým otvorem za předpokladu  $h \gg b$ .

## 2.12 Harmonický oscilátor

Uvažujme oscilátor hmotnosti  $m$  a tuhosti  $k$ . (Pro jednoduchost si můžeme představit těleso hmotnosti  $m$  zavěšené na pružině tuhosti  $k$  a oscilující kolem rovnovážné polohy.)



[http : //en.wikipedia.org/wiki/Harmonic\\_oscillator](http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_oscillator)

Označíme

- $x(t)$  – *výchylku* kmitavého pohybu od rovnovážné polohy v čase  $t \geq 0$ ,
- $A$  – *maximální výchylku* oscilátoru ( $|x(t)| \leq A$  v každém časovém okamžiku  $t$ ),
- $T$  – *dobu kmitu* (periodu): nejmenší časový úsek, ve kterém nabývá výchylka  $x(t)$  periodického kmitavého pohybu opět stejné hodnoty,
- $f = 1/T$  – *frekvenci* (kmitočet), tj., počet kmitů oscilátoru za jednu sekundu,
- $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  – *úhlovou frekvenci*,
- $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$  – *fázi* ( $\varphi(0) = \varphi_0$  je *počáteční fáze* v čase  $t = 0$ ).

### 2.12.1 Volné harmonické kmity

Z experimentů vychází, že volné harmonické kmity jsou v čase  $t$  vyjádřeny výchylkou

$$x(t) = A \cdot \sin \varphi(t) = A \cdot \sin (\omega t + \varphi_0) \quad (2.3)$$

a působí při nich jen *direktivní síla*. V okamžiku  $t$  směřuje direktivní síla  $F_d = -kx$  vždy do rovnovážné polohy a podle Newtonovy pohybové rovnice je  $F_d = m \cdot a$  se zrychlením  $a = d^2x/dt^2$ . Proto je

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (t \geq 0)$$

diferenciální *pohybovou rovnicí volného oscilátoru*. Tuto rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K^2x = 0 \quad \left( t \geq 0, K^2 = \frac{k}{m} > 0 \right). \quad (2.4)$$

Předpokládáme-li řešení rovnice (2.4) ve tvaru  $x = x(t) = e^{\lambda t}$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ), pak má charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + K^2 = 0$$

dva komplexně sdružené kořeny  $\lambda_{1,2} = \pm Ki$  a funkce  $\sin Kt, \cos Kt$  tvoří fundamentální systém rovnice (2.4). Proto je její obecné řešení tvaru

$$x(t) = c_1 \sin Kt + c_2 \cos Kt = C \sin(Kt + \psi), \quad c_1, c_2, C, \psi \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$


Pro výchylku (2.3) harmonických kmitů platí

$$x(t) = A \cdot \sin \varphi(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = C \sin(Kt + \psi),$$

proto

$$C = A, K = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \psi = \varphi_0 \quad (2.6)$$

a řešení diferenciální rovnice (2.4) je vyjádřením harmonických kmitů.

**Poznámka 2.12.1** Druhý ze vztahů (2.6) umožňuje zjišťovat frekvenci kmitů z tuhosti a hmotnosti oscilátoru. 

**Poznámka 2.12.2** 

- *Rychlost oscilátoru* v čase  $t$  je

$$v(t) = dx(t)/dt = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Maximální rychlost  $v_{max} = |dx(t)/dt|_{max} = A\omega$  dosáhne proto oscilátor při

$$|\cos(\omega t + \varphi_0)| = 1 \Leftrightarrow \omega t + \varphi_0 = l\pi \quad (l \in \mathbb{N}),$$

tedy v rovnovážných polohách.

- *Zrychlení oscilátoru* v čase  $t$  je

$$a(t) = dv(t)/dt = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t).$$

Proto dochází k maximálnímu zrychlení  $a_{max} = |dv(t)/dt|_{max} = A\omega^2$  při

$$|\sin(\omega t + \varphi_0)| = 1 \Leftrightarrow \omega t + \varphi_0 = l\pi/2 \quad (l \in \mathbb{N}),$$

tedy v okamžiku maximální výchylky.

---



**Poznámka 2.12.3** K popisu oscilátoru používáme také časově nezávislé *efektivní hodnoty* výchylky, rychlosti a zrychlení oscilátoru.

Pro libovolnou funkci  $y = f(x)$  integrovatelnou v kvadrátu na intervalu  $\langle t_1, t_2 \rangle$  definujeme efektivní hodnotu vztahem

$$y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt} .$$

Na intervalu  $\langle 0, T \rangle$  periody můžeme pak stanovit

$$\begin{aligned} x_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{A^2}{T} \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) dt = \\ &= \left| \begin{array}{c|c|c} \frac{2\pi}{T}t + \varphi_0 = \tau & t & 0 \\ \frac{2\pi}{T}dt = d\tau & \tau & \varphi_0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} T \\ \varphi_0 + 2\pi \end{array} \right| = \frac{A^2}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \sin^2 \tau d\tau = \\ &= \frac{A^2}{4\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} (1 - \cos 2\tau) d\tau = \frac{A^2}{8\pi} [2\tau - \sin 2\tau]_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} = \frac{A^2}{2}, \\ x_{ef} &= \frac{A}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

Podobně

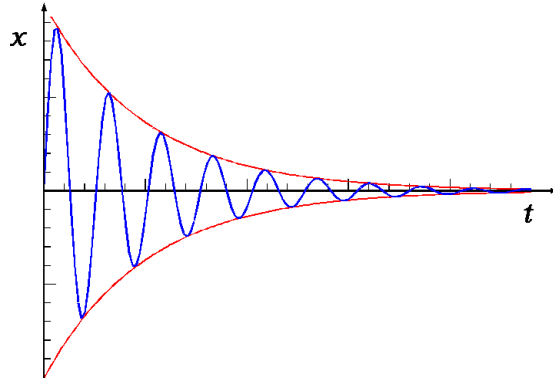
$$\begin{aligned} v_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) dt = \omega^2 \cdot \left( \frac{1}{T} \int_0^T A^2 (1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)) dt \right) = \\ &= \omega^2 \cdot \left( \frac{A^2}{T} \int_0^T dt - x_{ef}^2 \right) = \omega^2 \cdot \left( A^2 - \frac{A^2}{2} \right) = \frac{\omega^2 A^2}{2}, \\ v_{ef} &= \frac{A\omega}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

Nakonec

$$\begin{aligned} a_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \omega^4 \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \omega^4 x_{ef}^2 = \frac{A^2 \omega^4}{2}, \\ a_{ef} &= \frac{A\omega^2}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

### 2.12.2 Tlumené kmity

Na oscilátor působí kromě direktivní síly  $F_d = -kx$  také *tlumící síla*  $F_t$ . Vektor tlumící síly závisí obvykle přímo úměrně na vektoru rychlosti oscilátoru, má opačnou orientaci a amplituda kmitů se proto postupně zmenšuje.



Položíme-li tedy  $F_t = -R_m \frac{dx}{dt}$ , kde  $R_m$  je mechanický odpor, pak je splněno

$$F_d + F_t = m \cdot a$$

užitím Newtonovy pohybové rovnice. *Pohybová rovnice tlumeného oscilátoru* je pak

$$-kx - R_m \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad t \geq 0, \text{ tj.},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.7)$$

kde  $\delta = R_m/(2m)$  je *součinitel tlumení* a  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  je *vlastní frekvence volného oscilátoru*.

Uvažujme pro tlumené kmity výchylku

$$x(t) = A_0 f(t) \cdot \sin \varphi(t) = A_0 f(t) \cdot \sin (\omega t + \varphi_0), \quad (2.8)$$

kde předpokládáme  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  při snižování amplitudy  $A = A_0 f(t)$ . Vyřešíme nyní rovnici (2.7). Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

a mohou nastat tři různé případy.



(*l*) Je-li  $\delta < \omega_0$ , je tlumení oscilátoru *podkritické*,  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  je *úhlová frekvence podkritických tlumených kmitů* a  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega_d \cdot i$ . Obecné řešení rovnice (2.7) bude v tomto případě skutečně tvaru (2.8),

$$x(t) = c_1 e^{-\delta t} \cos \omega_d t + c_2 e^{-\delta t} \sin \omega_d t = C e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \psi) \quad (c_1, c_2, C, \psi \in \mathbb{R}),$$

kde  $C = A_0$ ,  $f(t) = e^{-\delta t}$ ,  $\omega = \omega_d$ ,  $\psi = \varphi_0$ , tj., funkce

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

vyjadřuje výchylku tlumených kmitů.

(*u*) Je-li  $\delta = \omega_0$ , je tlumení oscilátoru *kritické*,  $\omega_d = 0$  a  $\lambda_{1,2} = -\delta < 0$  je dvojnásobným reálným kořenem charakteristické rovnice. Obecné řešení rovnice (2.7) bude je tvaru

$$x(t) = c_1 e^{-\delta t} + c_2 t e^{-\delta t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

a nemůže vyjadřovat výchylku tlumených kmitů (2.8), kmity oscilátoru v tomto případě nevznikají a snadno se můžeme přesvědčit, že  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

(*uu*) Podobně nevznikají kmity tlumeného oscilátoru ani při splnění zbývajících podmínky  $\delta > \omega_0$ , tlumení oscilátoru je *nadkritické*. Kořeny charakteristické rovnice jsou reálné a navzájem různé, obecné řešení rovnice (2.7) je tvaru

$$x(t) = c_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \rightarrow 0 \text{ pro } t \rightarrow \infty \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

### 2.12.3 Nucené kmity

Tlumené kmity se realizují v podkritickém případě a s rostoucím časem se snižuje jejich amplituda. Mají-li se kmity udržet, je potřebné přidat vnější periodickou *budící sílu*  $F_b = F_{max} \sin(\omega_b t + \varphi_{0b})$ . Budící síla se opakuje s periodou  $T_b = 2\pi/\omega_b$  a její maximální hodnota je  $F_{max}$ . Dostáváme tak *buzený harmonický oscilátor*. Vzniklé kmity nazveme *buzené (nucené)*. Analogickým postupem jako u tlumených kmitů sestavíme rovnici

$$F_d + F_t + F_b = m \cdot a.$$

*Pohybová rovnice nucených kmitů oscilátoru je pak*

$$-kx - R_m \frac{dx}{dt} + F_{max} \sin(\omega_b t + \varphi_{0b}) = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad t \geq 0, \text{ tj.},$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_{max}}{m} \sin(\omega_b t + \varphi_{0b}), \quad (2.9)$$

kde opět  $\delta = R_m/(2m)$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Z matematického pohledu se jedná o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou, kterou vyřešíme standardním postupem.

(a) Nejprve najdeme obecné řešení zkrácené rovnice, která odpovídá pohybové rovnici tlumeného oscilátoru a její řešení je proto tvaru

$$\hat{x}(t) = A_0 e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0). \quad (2.10)$$

(b) Předpokláme-li partikulární řešení diferenciální rovnice (2.9) ve tvaru

$$X(t) = A_b \sin(\omega_b t + \psi), \quad (2.11)$$

pak obdržíme podmínku

$$A_b(\omega_0^2 - \omega_b^2) \sin(\omega_b t + \psi) + 2\delta A_b \omega_b \cos(\omega_b t + \psi) = \frac{F_{max}}{m} \sin(\omega_b t + \varphi_{0b}), \quad (2.12)$$

jejím derivováním podle času  $t$  a úpravou

$$A_b(\omega_0^2 - \omega_b^2) \cos(\omega_b t + \psi) - 2\delta A_b \omega_b \sin(\omega_b t + \psi) = \frac{F_{max}}{m} \cos(\omega_b t + \varphi_{0b}). \quad (2.13)$$

Například v čase  $t = -\psi/\omega_b$  je  $\omega_b t + \psi = 0$  a rovnice (2.12, 2.13) nabývají tvaru

$$2\delta A_b \omega_b = \frac{F_{max}}{m} \sin(\varphi_{0b} - \psi), \quad A_b(\omega_0^2 - \omega_b^2) = \frac{F_{max}}{m} \cos(\varphi_{0b} - \psi).$$

Odtud

$$(2\delta A_b \omega_b)^2 + (A_b(\omega_0^2 - \omega_b^2))^2 = \left(\frac{F_{max}}{m}\right)^2, \quad \text{tg}(\varphi_{0b} - \psi) = \frac{2\delta\omega_b}{\omega_0^2 - \omega_b^2}, \quad \text{tj.},$$

$$A_b = \frac{F_{max}}{m\sqrt{(2\delta\omega_b)^2 + (\omega_0^2 - \omega_b^2)^2}}, \quad \psi = \varphi_{0b} + \text{arctg} \frac{2\delta\omega_b}{\omega_0^2 - \omega_b^2}. \quad (2.14)$$

(c) Obecné řešení pohybové rovnice nucených kmitů oscilátoru je součtem obecného řešení rovnice zkrácené s libovolným partikulárním řešením rovnice nezkrácené, proto

$$x(t) = \hat{x}(t) + X(t) = A_0 e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) + A_b \sin(\omega_b t + \psi), \quad (2.15)$$

kde jsou  $A_b, \psi$  určeny podmínkami (2.14).



# Literatura

- [1] Landau L.D., Lifshitz, E. M., *Theory of Elasticity*, 3rd ed., Oxford, England: Butterworth Heinemann, ISBN 0-7506-2633-X, 1986.
  - [2] Stanoyevitch A., *Introduction to Numerical Ordinary and Partial Differential Equations using MATLAB*, John Wiley & Sons, 2005.
  - [3] Stroud K. A., Booth J. Dexter, *Engineering mathematics*, 6th ed., PALGRAVE MACMILLAN, New York, 2007.
  - [4] Stroud K. A., Booth J. Dexter, *Advanced engineering mathematics*, 4th ed., Industrial Press, INC., New York, 2003.
  - [5] Lancaster P., Tismenetsky M., *The theory of matrices*, 2nd ed. with applications, Academic Press, Computer Science and Applied Mathematics, An imprint of Elsevier, 1985.
  - [6] Riley K. F., Hobson M. P., Bence S. J., *Mathematical methods for physics and engineering*, 3rd.ed., Cambridge University Press, England, 2006
  - [7] Chobola Z, Juránková V., *Fyzika, BB01\_M04*, elektronický učební text, FAST VUT v Brně, 2005.
  - [8] Pazdera L., *Fyzika, Mechanické kmitání a vlnění, BB01\_M05*, elektronický učební text, FAST VUT v Brně, 2005.
  - [9] Jandora J., *Hydraulika a hydrologie, BR51\_M01*, elektronický učební text, FAST VUT v Brně, 2005.
  - [10] Schauer P., *Aplikovaná fyzika, BB02\_M04*, elektronický učební text, FAST VUT v Brně, 2006.
  - [11] Koktavý B., Koktavý P., *GB02-Fyzika II, GB02\_M01*, elektronický učební text, FAST VUT v Brně, 2006.
-