

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

JOSEF DALÍK

NUMERICKÉ METODY II



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

STUDIJNÍ MATERIÁL

Tento studijní materiál byl zpracován s podporou projektu OPVK ESF *Rozvoj a modernizace doktorského studijního programu Stavební inženýrství [CZ.1.07/2.2.00/15.0428]*.
© Ústav matematiky a deskriptivní geometrie FAST VUT v Brně, 2013

Obsah

1	Aproximace řešení eliptických okrajových úloh pro ODR 2. řádu metodou konečných prvků	4
1.1	Klasická formulace úlohy	4
1.2	Fyzikální význam	4
1.3	Existence klasického řešení	4
1.4	Galerkinova (slabá) formulace	5
1.5	Diskretizace Galerkinovou metodou a metodou konečných prvků .	7
1.6	Řešené příklady	9
1.7	Lineární konečný prvek a algoritmus MKP v 1D	17
2	Regulární oblasti a integrovatelné funkce	19
3	Rovnice vedení tepla	23
3.1	Odvození rovnice vedení tepla	23
3.2	Klasická formulace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici	25
3.3	Variační formulace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici	26
4	Diskretizace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici metodou konečných prvků (MKP)	27
4.1	Po částech lineární funkce	27
4.2	Metoda konečných prvků	28
4.3	Algoritmizace	30
5	Minimizační formulace úlohy (3.4), (3.5)	36
6	Obecná stacionární eliptická úloha	38
6.1	Diskretizace variační formulace (5)	39
7	Nestacionární úloha vedení tepla	41
8	Nestacionární úloha konvekce-difúze	44
9	Další typy konečných elementů	47

1 Aproximace řešení eliptických okrajových úloh pro ODR 2. řádu metodou konečných prvků

1.1 Klasická formulace úlohy

Pro danou funkci $a^2 \in C^1\langle 0, l \rangle$, $a^2(x) \geq a_0 > 0$ a funkce $p, q, f \in C\langle 0, l \rangle$, $q \geq 0$, najděte $y \in C^2\langle 0, l \rangle$ tak, aby byla splněna diferenciální rovnice

$$-(a^2 y')' + p y' + q y = f \quad \text{pro } x \in (0, l) \quad (1)$$

a pro $x = 0$ i $x = l$ jedna z *okrajových podmínek*

$$\begin{aligned} y(x) &= c \quad \text{Dirichletova nebo} \\ y'(x) &= d \quad \text{Neumannova nebo} \\ \alpha y(x) + \beta y'(x) &= \gamma \quad \text{Newtonova } (\alpha \neq 0 \neq \beta) \end{aligned}$$

1.2 Fyzikální význam

Existuje dlouhá řada různých fyzikálních významů této úlohy. Uvedeme dva z nich.

$y(x)$	teplota [koncentrace příměsi]
$a^2(x)$	koefficient tepelné vodivosti [koefficient difúze]
$p(x)$	rychlost toku
$f(x)$	intenzita zdrojů tepla [příměsi]
$q(x)$	koefficient absorpce

Výraz $-a^2(x)y'(x)$ má význam intenzity toku v kladném směru osy x . Pak Neumannova okrajová podmínka určuje intenzitu toku přes hranici a Newtonova okrajová podmínka je podmínkou přestupu tepla [příměsi]. Pro $x = l$

$$-a^2(l)y'(l) = \alpha(y(l) - y_{ext})$$

znamená, že intenzita toku je úměrná rozdílu mezi hodnotou $y(l)$ v hraničním bodu l a hodnotou y_{ext} (teplotou [koncentrací příměsi] v exteriéru blízko bodu l), vynásobeném koefficientem přestupu tepla [příměsi] $\alpha > 0$.

1.3 Existence klasického řešení

Předpokládejme, že funkce $p(x)$ nemění znaménko v intervalu $\langle 0, l \rangle$. Je-li Dirichletova podmínka dána v bodu $\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pro } p > 0, \\ l & \text{pro } p < 0, \end{array} \right\}$, pak má klasická úloha pro ODR (1) jediné řešení.

V dalším textu budeme tuto podmínku, zaručující jednoznačné řešení klasické úlohy, považovat za splněnou.

1.4 Galerkinova (slabá) formulace

Pro určitost uvažme níže uvedenou úlohu (2), která vznikne z úlohy (1) volbou Dirichletovy podmínky v bodě 0 a Newtonovy podmínky v bodě l :

$$\begin{aligned} -(a^2 y')' + p y' + q y &= f \quad \text{pro } x \in (0, l), \\ y(0) &= \alpha_0, \quad -a^2(l) y'(l) = \beta_l + \gamma y(l). \end{aligned} \quad (2)$$

Vynásobme obě strany rovnice (2) libovolnou *testovací funkcí* $v \in C^1(0, l)$, $0 = v(0)$, a tyto součiny integrujme přes interval $\langle 0, l \rangle$:

$$\int_0^l (-(a^2 y')' + p y' + q y) v \, dx = \int_0^l f v \, dx. \quad (3)$$

Symetrizace.

$$\begin{aligned} - \int_0^l (a^2 y')' v \, dx &= \left| \begin{array}{ll} -(a^2 y')' = \alpha' & v = \beta \\ -a^2 y' = \alpha & v' = \beta' \end{array} \right| = [-a^2 y' v]_0^l + \int_0^l a^2 y' v' \, dx \\ &= \int_0^l a^2 y' v' \, dx + \beta_l v(l) + \gamma y(l) v(l). \end{aligned}$$

Po dosazení do (3) a převedení všech členů, které nezávisí na funkci y na pravou stranu, obdržíme

$$B(y, v) = L(v), \quad (4)$$

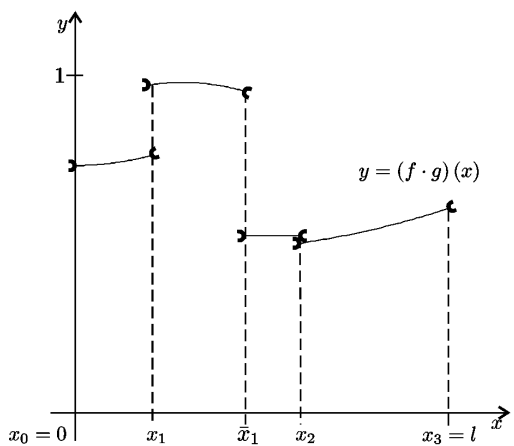
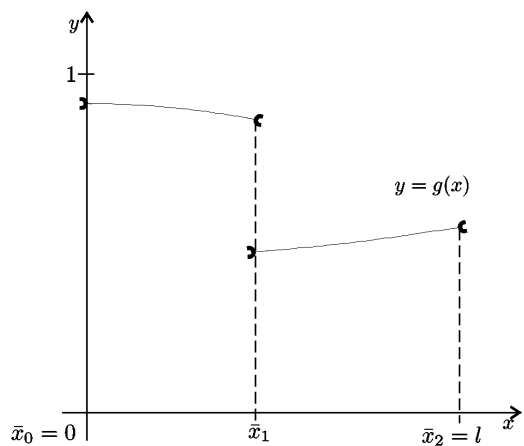
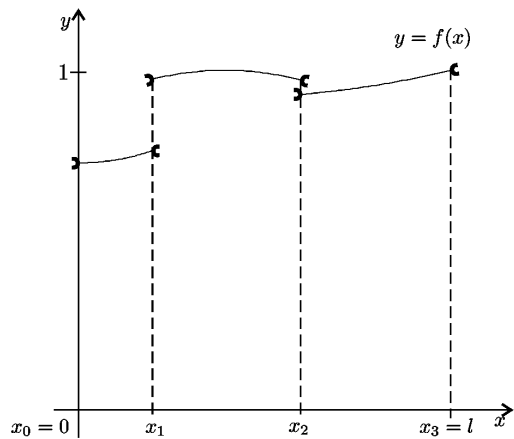
kde

$$\begin{aligned} B(y, v) &= \int_0^l (a^2 y' v' + p y' v + q y v) \, dx + \gamma y(l) v(l) \quad \text{a} \\ L(v) &= \int_0^l f v \, dx - \beta_l v(l). \end{aligned}$$

Funkce φ je *po částech spojitá* na intervalu $\langle 0, l \rangle$, když má konečně mnoho možných bodů nespojitosti $0 = x_0 < \dots < x_n = l$, tj. pro $i = 1, \dots, n$ platí $\varphi \in C(x_{i-1}, x_i)$ a přitom mají jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} \varphi(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} \varphi(x)$$

konečné hodnoty. Obr. 1 ilustruje skutečnost, že součin po částech spojitých funkcí je opět funkce po částech spojitá.



Obrázek 1: Příklady po částech spojitých funkcí.

Symbolem $PC(0, l)$ označíme prostor funkcí po částech spojitých na intervalu $\langle 0, l \rangle$. Dále označíme symbolem $PC^1(0, l)$ prostor funkcí φ z $C(0, l)$ takových, že $\varphi' \in PC(0, l)$. Lze si snadno uvědomit, že výraz $B(y, v)$ má konečnou hodnotu, jakmile $y, v \in PC^1(0, l)$.

Nazveme-li

$$W = \{w \in PC^1(0, l) | w(0) = \alpha_0\}$$

množinou přípustných řešení a

$$V = \{v \in PC^1(0, l) | v(0) = 0\}$$

prostorem testovacích funkcí, lze uvést tuto Galerkinovu (slabou) formulaci úlohy (2): Najděte funkci $y \in W$ tak, aby

$$B(y, v) = L(v) \quad \text{pro všechny funkce } v \in V. \quad (5)$$

Poznámka 1. Z odvození Galerkinovy formulace úlohy plyne, že každé klasické řešení úlohy (1) je i řešením Galerkinovy (slabé) formulace. Naopak řešení Galerkinovy formulace zpravidla nejsou současně klasickými řešeními dané úlohy. Je-li však $y \in C^2(0, l)$ a jsou-li splněny všechny další požadavky na hladkost klasického řešení, je řešení Galerkinovo též řešením klasickým.

Poznámka 2. V Galerkinově formulaci se explicitně neobjevuje Newtonova okrajová podmínka v bodě l . Tato podmínka je „zabudovaná“ do výrazů $B(y, v)$ a $L(v)$ a nazývá se *přirozená*. Naproti tomu splnění Dirichletovy podmínky je požadováno od všech přípustných řešení. Dirichletova podmínka se nazývá *podstatná*.

Poznámka 3. Lze snadno ukázat, že výraz $B(y, v)$ je lineární vzhledem k funkcím y i v , tj. že

$$\begin{aligned} B(\alpha y + \beta z, v) &= \alpha B(y, v) + \beta B(z, v), \\ B(y, \gamma v + \delta w) &= \gamma B(y, v) + \delta B(y, w) \end{aligned}$$

platí pro všechna $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ a $y, z, v, w \in PC^1(0, l)$. Podobně platí

$$L(\alpha v + \beta w) = \alpha L(v) + \beta L(w)$$

pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $v, w \in PC^1(0, l)$.

Říkáme, že $B(y, v)$ je *bilineární forma* a $L(v)$ nazýváme *lineární formou*.

1.5 Diskretizace Galerkinovou metodou a metodou konečných prvků

Jestliže $y_0 \in W$ a funkce ζ_1, \dots, ζ_n leží v prostoru V , pak pro libovolné reálné koeficienty y_1, \dots, y_n leží funkce

$$y_G(x) = y_0(x) + y_1 \cdot \zeta_1(x) + \dots + y_n \cdot \zeta_n(x) \quad (6)$$

v množině W . Řekneme, že y_G je *aproximace* řešení úlohy (5), když

$$B(y_G, \zeta_i) = L(\zeta_i) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Dosadíme-li do (7) za y_G vyjádření (6) a využijeme-li bilinearity formy $B(y, v)$, vznikne systém rovnic

$$K\vec{y} = \vec{F}, \quad (8)$$

kde

$$K = \begin{bmatrix} B(\zeta_1, \zeta_1) & B(\zeta_2, \zeta_1) & \dots & B(\zeta_n, \zeta_1) \\ B(\zeta_1, \zeta_2) & B(\zeta_2, \zeta_2) & \dots & B(\zeta_n, \zeta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\zeta_1, \zeta_n) & B(\zeta_2, \zeta_n) & \dots & B(\zeta_n, \zeta_n) \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \tilde{L}(\zeta_1) \\ \tilde{L}(\zeta_2) \\ \vdots \\ \tilde{L}(\zeta_n) \end{bmatrix}.$$

Zde $\tilde{L}(\zeta_i) = L(\zeta_i) - B(y_0, \zeta_i)$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. K se nazývá *matice tuhosti* a \vec{F} *vektor zatížení*.

Metoda konečných prvků je Galerkinova metoda, v níž jsou testovací funkce ζ_1, \dots, ζ_n zvoleny tak, aby matice tuhosti K byla pásová. Nazveme-li množinu

$$\text{supp}(\zeta_i) = \{x \in \langle 0, l \rangle \mid \zeta_i(x) \neq 0\}$$

nosičem funkce ζ_i pro $i = 1, \dots, n$, pak

$$\text{supp}(\zeta_i) \cap \text{supp}(\zeta_j) = \emptyset \implies B(\zeta_i, \zeta_j) = 0. \quad (9)$$

Uvažme síť uzlů $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = l$ a označme $h_i = x_i - x_{i-1}$ délku intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ pro $i = 1, \dots, n$. Každému uzlu x_i přiřadíme lineární splajn $\varphi_i(x)$ předpisem

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = i \\ 0 & \text{pro } j \neq i \end{cases}.$$

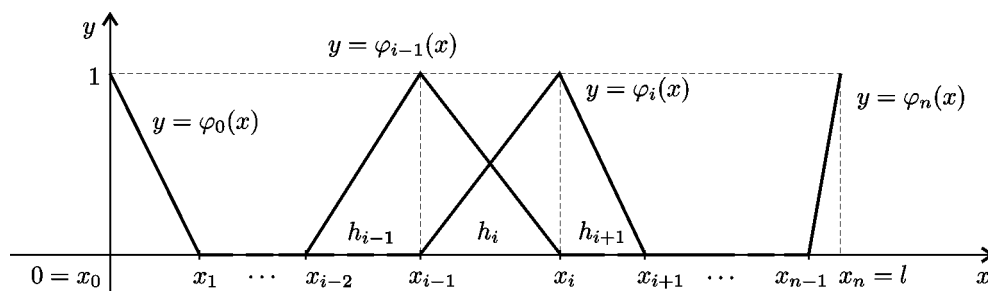
Z Obr. 2 je patrné, že $\varphi_i \in PC^1(0, l)$, $\text{supp}(\varphi_i) = (x_{i-1}, x_{i+1}) \cap \langle 0, l \rangle$ a

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & \text{pro } x \in (x_{i-1}, x_i) \cap \langle 0, l \rangle \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & \text{pro } x \in (x_i, x_{i+1}) \cap \langle 0, l \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad \varphi_i'(x) = \begin{cases} 1/h_i & \text{pro } x \in (x_{i-1}, x_i) \cap \langle 0, l \rangle \\ -1/h_{i+1} & \text{pro } x \in (x_i, x_{i+1}) \cap \langle 0, l \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (10)$$

pro $i = 0, \dots, n$. Odtud ihned plyne

$$|i - j| > 1 \implies \text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) = \emptyset. \quad (11)$$

Vytvoříme-li aproximaci y_G pomocí těchto funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, pak z (9) a (11) plyne, že matice tuhosti je třídiagonální. Je výhodné, že pro výpočet hodnot prvků $B(\varphi_{i-1}, \varphi_i)$ pod hlavní diagonálou stačí integrovat přes interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, prvků $B(\varphi_i, \varphi_i)$ v hlavní diagonále přes interval $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle$ a prvků $B(\varphi_i, \varphi_{i+1})$ nad hlavní diagonálou přes interval $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$.



Obrázek 2: Ilustrace grafů funkcí φ_i .

1.6 Řešené příklady

Příklad 1.1. Řešení okrajové úlohy

$$-0,5y'' - y' = 1 \quad \text{v } (0,1), \quad y(0) - y'(0) = 0,2, \quad y(1) = 0$$

aproximujte metodou konečných prvků s ekvidistantními uzly s kroky 0,2 a 0,1.

Řešení. Položíme-li

$$V = \{v \in PC^1(0,1) \mid v(1) = 0\} = W,$$

pak pro řešení y a každou funkci $v \in V$ platí

$$\int_0^1 (-0,5y'' - y')v \, dx = \left| \begin{array}{l} -0,5y'' = \alpha' \quad v = \beta \\ -0,5y' = \alpha \quad v' = \beta' \end{array} \right| = [-0,5y'v]_0^1 + \int_0^1 (0,5y'v' - y'v) \, dx = 0,5(y(0) - 0,2)v(0) + \int_0^1 (0,5y'v' - y'v) \, dx = \int_0^1 v \, dx.$$

Tedy Galerkinova (slabá) formulace: Najděte $y \in W$ tak, aby $B(y, v) = L(v)$ pro všechna $v \in V$, když

$$B(y, v) = \int_0^1 (0,5y'v' - y'v) \, dx + 0,5y(0)v(0) \quad \text{a} \quad L(v) = \int_0^1 v \, dx + 0,1v(0).$$

Označme φ_j lineární splajn, příslušný uzlu $x_j = 0,2j$ pro $j = 0, 1, \dots, 5$ a položme $h = 0,2$. Pak funkce

$$y_h = y_0 \cdot \varphi_0 + \dots + y_4 \cdot \varphi_4$$

leží v množině W . Řekneme, že y_h je aproximací slabého řešení, jestliže

$$B(y_h, \varphi_i) = L(\varphi_i) \iff \sum_{j=0}^4 y_j B(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i)$$

pro $i = 0, \dots, 4$. Tedy koeficienty y_0, \dots, y_4 jsou řešením systému rovnic

$$\begin{bmatrix} B(\varphi_0, \varphi_0) & B(\varphi_1, \varphi_0) & & & & L(\varphi_0) \\ B(\varphi_0, \varphi_1) & B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_1) & & & L(\varphi_1) \\ & B(\varphi_1, \varphi_2) & B(\varphi_2, \varphi_2) & B(\varphi_3, \varphi_2) & & L(\varphi_2) \\ & & B(\varphi_2, \varphi_3) & B(\varphi_3, \varphi_3) & B(\varphi_4, \varphi_3) & L(\varphi_3) \\ & & & B(\varphi_3, \varphi_4) & B(\varphi_4, \varphi_4) & L(\varphi_4) \end{bmatrix}.$$

Přitom

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 5(0,2 - x) \\ 0 \end{cases}, \quad \varphi'_0(x) = \begin{cases} -5 & \text{pro } 0 < x < 0,2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad (12)$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 5(x - 0,2(i-1)) \\ 5(0,2(i+1) - x) \\ 0 \end{cases}, \quad \varphi'_i(x) = \begin{cases} 5 & \text{pro } 0,2(i-1) < x < 0,2i \\ -5 & \text{pro } 0,2i < x < 0,2(i+1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (13)$$

pro $i = 1, \dots, 4$ a Protože koeficienty v $B(y, v)$ a $L(v)$ jsou konstantní, nezávisí jejich hodnoty na „poloze“ funkcí φ_i v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pak

$$B(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} (0,5 \cdot (-5) \cdot 5 - (-5)\varphi_i) dx = -2,5 + 5 \cdot 0,1 = -2$$

pro $i = 1, \dots, 4$,

$$B(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (0,5 \cdot 5 \cdot (-5) - 5\varphi_i) dx = -2,5 - 5 \cdot 0,1 = -3$$

pro $i = 0, \dots, 3$,

$$B(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^{0,2} (0,5 \cdot 25 - (-5) \cdot \varphi_0) dx + 0,5 = 2,5 + 0,5 + 0,5 = 3,5 \text{ a}$$

$$\begin{aligned} B(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} (0,5 \cdot 5^2 - 5\varphi_i) dx \\ &+ \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (0,5 \cdot (-5)^2 - (-5)\varphi_i) dx = 5 \end{aligned}$$

pro $i = 1, \dots, 4$. Dále

$$L(\varphi_0) = \int_0^{0,2} \varphi_0(x) dx + 0,1 \cdot \varphi_0(0) = 0,1 + 0,1 = 0,2$$

a

$$L(\varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2(i+1)} \varphi_i(x) dx = 0,2.$$

Výsledný systém rovnic:

$$\begin{bmatrix} 3,5 & -3 & & & & & 0,2 \\ -2 & 5 & -3 & & & & 0,2 \\ & -2 & 5 & -3 & & & 0,2 \\ & & -2 & 5 & -3 & & 0,2 \\ & & & -2 & 5 & -3 & 0,2 \\ & & & & -2 & 5 & 0,2 \end{bmatrix}$$

a jeho řešením je vektor

$$[0,45509; 0,46428; 0,40373; 0,29670; 0,15868]$$

hodnot aproximace y_h v uzlech 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8. Aproximace $y_{h/2}$ nabývá v těchto uzlech hodnot

$$[0,45629; 0,46395; 0,40295; 0,29601; 0,15830].$$

Porovnání chyb s kroky $h = 0,2$ a $h/2 = 0,1$:

i	0	1	2	3	4
$(y_h - y)(0,2i)$	-0,00160	0,00044	0,00103	0,00092	0,00042
$(y_{h/2} - y)(0,2i)$	-0,00040	0,00011	0,00025	0,00023	0,00012

Obecně je přesnost MKP a metody sítí na stejné úrovni.

Příklad 1.2. Najděte aproximaci řešení úlohy

$$-y'' + 20y' = 1 \quad \text{v } (0, 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

metodou konečných prvků pro ekvidistantní uzly s krokem $h = 0,2$.

Řešení. Položíme $V = \{v \in PC^1(0, 1) \mid v(0) = 0 = v(1)\}$ a $W = \{w \in PC^1(0, 1) \mid w(0) = 0, w(1) = 1\}$. Pro přesné řešení y a libovolnou testovací funkci $v \in V$ platí

$$\int_0^1 (-y'' + 20y')v \, dx = \begin{vmatrix} -y'' = \alpha' & v = \beta \\ -y' = \alpha & v' = \beta' \end{vmatrix} = \int_0^1 (y'v' + 20y'v) \, dx = \int_0^1 v \, dx,$$

takže Galerkinova formulace zní: Najděte funkci $y \in W$ tak, aby

$$B(y, v) = L(v) \quad \text{pro všechna } v \in V,$$

když

$$B(y, v) = \int_0^1 (y'v' + 20y'v) dx \quad \text{a} \quad L(v) = \int_0^1 v dx.$$

Pro aproximaci řešení této úlohy užijeme lineární splajny $\varphi_0, \dots, \varphi_5$ příslušné uzlům $x_j = 0,2j$. Funkce

$$y_G = y_1 \cdot \varphi_1 + \dots + y_4 \cdot \varphi_4 + \varphi_5$$

leží v množině W . y_G je aproximací řešení úlohy, když

$$B(y_G, \varphi_i) = L(\varphi_i) \iff \sum_{j=1}^4 y_j B(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i) - B(\varphi_5, \varphi_i) \equiv \tilde{L}(\varphi_i)$$

pro $i = 1, \dots, 4$. Tento systém rovnic má vzhledem k (9) a (11) strukturu

$$\begin{bmatrix} B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_1) & & & \\ B(\varphi_1, \varphi_2) & B(\varphi_2, \varphi_2) & B(\varphi_3, \varphi_2) & & \\ & B(\varphi_2, \varphi_3) & B(\varphi_3, \varphi_3) & B(\varphi_4, \varphi_3) & \\ & & B(\varphi_3, \varphi_4) & B(\varphi_4, \varphi_4) & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{L}(\varphi_1) \\ \tilde{L}(\varphi_2) \\ \tilde{L}(\varphi_3) \\ \tilde{L}(\varphi_4) \end{bmatrix},$$

Protože všechny koeficienty ve formách $B(y, v)$ a $L(v)$ jsou konstantní, platí

$$B(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} ((-5) \cdot 5 + 20 \cdot (-5)\varphi_i) dx = -15$$

pro $i = 2, \dots, 4$,

$$B(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} (25 + 20 \cdot 5\varphi_i) dx + \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (25 + 20 \cdot (-5)\varphi_i) dx = 10$$

pro $i = 1, \dots, 4$ a

$$B(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (5 \cdot (-5) + 20 \cdot 5\varphi_i) dx = 5$$

pro $i = 1, \dots, 3$. Dále

$$L(\varphi_i) = \int_0^1 \varphi_i(x) dx = 0,2$$

pro $i = 1, \dots, 4$. Tedy výsledný systém rovnic má tvar

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 10 & 5 & & & 0,2 \\ -15 & 10 & 5 & & 0,2 \\ & -15 & 10 & 5 & 0,2 \\ & & -15 & 10 & -4,8 \end{array} \right].$$

Jeho řešením je vektor $[0,02557; -0,01115; 0,1902; -0,27148]$. Tyto hodnoty aproximace y_h v uzlech $0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ jsou totožné s hodnotami aproximace metodou sítí z Př. 1.2. Aproximace y_G je nestabilní a matice výše uvedené soustavy není monotónní, stejně jako při použití metody sítí.

MKP je složitostí výsledných algoritmů i kvalitou získaných aproximací srovnatelná s metodou sítí. Její přednosti oproti metodě sítí se projevují v dimenzích 2 a 3 zejména v případech, kdy je oblast, na níž je daná úloha řešena, nepravidelná. Problémy MKP s nestabilitou jsou v podstatě stejné jako problémy metody sítí.

Příklad 1.3. Metodou konečných prvků s krokem $0,25$ aproximujte stacionární rozložení teploty látky s tepelnou vodivostí $0,4 \text{ W}/(\text{m}^0\text{C})$ v intervalu délky 1 m . Látka vtéká do intervalu o teplotě 1^0C , protéká jím rychlostí 1 m/s a z intervalu vytéká do prostředí o vnější teplotě $0,2^0\text{C}$ s přestupovým koeficientem $2 \text{ W}/(\text{m}^2^0\text{C})$.

Z fyzikálního významu úlohy (1) plyne, že hledaná teplota $y(x)$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je řešením okrajové úlohy

$$-0,4y'' + y' = 0 \quad \text{v } (0, 1), \quad y(0) = 1, \quad -0,4y'(1) = 2(y(1) - 0,2).$$

Řešení. Položíme $V = \{v \in PC^1(0, 1) \mid v(0) = 0\}$ a $W = \{w \in PC^1(0, 1) \mid w(0) = 1\}$. Pro přesné řešení y a libovolnou testovací funkci $v \in V$ platí

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-0,4y'' + y')v \, dx &= \left| \begin{array}{l} -0,4y'' = \alpha' \quad v = \beta \\ -0,4y' = \alpha \quad v' = \beta' \end{array} \right| \\ &= [-0,4y'v]_0^1 + \int_0^1 (0,4y'v' + y'v) \, dx \\ &= 2(y(1) - 0,2)v(1) + \int_0^1 (0,4y'v' + y'v) \, dx = 0, \end{aligned}$$

takže Galerkinova formulace zní: Najděte funkci $y \in W$ tak, aby

$$B(y, v) = L(v) \quad \text{pro všechna } v \in V,$$

když

$$B(y, v) = \int_0^1 (0,4y'v' + y'v) \, dx + 2y(1)v(1) \quad \text{a} \quad L(v) = 0,4v(1).$$

Pro aproximaci řešení této úlohy uijeme lineární splajny $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ příslušné uzlům $x_j = 0,25j$. Funkce

$$y_G = \varphi_0 + y_1 \cdot \varphi_1 + \dots + y_4 \cdot \varphi_4$$

leží v množině W . y_G je aproximací řešení úlohy, když

$$B(y_G, \varphi_i) = L(\varphi_i) \iff \sum_{j=1}^4 y_j B(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i) - B(\varphi_0, \varphi_i)$$

pro $i = 1, \dots, 4$. Tento systém rovnic má vzhledem k (9) a (11) strukturu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_1) & & & L(\varphi_1) - B(\varphi_0, \varphi_1) \\ B(\varphi_1, \varphi_2) & B(\varphi_2, \varphi_2) & B(\varphi_3, \varphi_2) & & L(\varphi_2) \\ & B(\varphi_2, \varphi_3) & B(\varphi_3, \varphi_3) & B(\varphi_4, \varphi_3) & L(\varphi_3) \\ & & B(\varphi_3, \varphi_4) & B(\varphi_4, \varphi_4) & L(\varphi_4) \end{array} \right],$$

Protože všechny koeficienty ve formách $B(y, v)$ a $L(v)$ jsou konstantní, platí

$$B(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_{0,25(i-1)}^{0,25i} (0,4(-5) \cdot 5 + (-4)\varphi_i) dx = -2,1$$

pro $i = 1, \dots, 4$,

$$B(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{0,25(i-1)}^{0,25i} (0,4 \cdot 16 + 4\varphi_i) dx + \int_{0,25i}^{0,25(i+1)} (0,4 \cdot 16 - 4\varphi_i) dx = 3,2$$

pro $i = 1, 2, 3$,

$$B(\varphi_4, \varphi_4) = \int_{0,75}^1 (0,4 \cdot 16 + 4\varphi_4) dx + 2 = 1,6 + 0,5 + 2 = 4,1 \text{ a}$$

$$B(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_{0,25i}^{0,25(i+1)} (0,4 \cdot 5 \cdot (-5) + 4\varphi_i) dx = -1,1$$

pro $i = 1, \dots, 3$. Dále

$$L(\varphi_1) - B(\varphi_0, \varphi_1) = 2,1$$

a

$$L(\varphi_2) = 0 = L(\varphi_3), \quad L(\varphi_4) = 0,4.$$

Tedy výsledný systém rovnic má tvar

$$\begin{bmatrix} 3,2 & -1,1 & & & & 2,1 \\ -2,1 & 3,2 & -1,1 & & & 0 \\ & & -2,1 & 3,2 & -1,1 & 0 \\ & & & -2,1 & 4,1 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Jeho řešením je vektor $[0,96157; 0,88821; 0,74815; 0,48076]$. Toto jsou hodnoty aproximace y_G v uzlech $0,25; 0,5; 0,75; 1$.

Příklad 1.4. Najděte aproximaci řešení úlohy

$$-y'' - 5y' = -1 \quad \text{v } (0, 1), \quad -y'(0) = 0,5(1 - y(0)), \quad y(1) = 1$$

metodou konečných prvků s krokem $h = 0,2$.

Řešení. Položíme $V = \{v \in PC^1(0, 1) \mid v(1) = 0\}$ a $W = \{w \in PC^1(0, 1) \mid w(1) = 1\}$. Pro přesné řešení y a libovolnou testovací funkci $v \in V$ platí

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-y'' - 5y')v \, dx &= \left| \begin{array}{l} -y'' = \alpha' \quad v = \beta \\ -y' = \alpha \quad v' = \beta' \end{array} \right| \\ &= [-y'v]_0^1 + \int_0^1 (y'v' - 5y'v) \, dx \\ &= 0,5(y(0) - 1)v(0) + \int_0^1 (y'v' - 5y'v) \, dx = - \int_0^1 v \, dx, \end{aligned}$$

takže Galerkinova formulace zní: Najděte funkci $y \in W$ tak, aby

$$B(y, v) = L(v) \quad \text{pro všechna } v \in V,$$

když

$$B(y, v) = \int_0^1 (y'v' - 5y'v) \, dx + 0,5y(0)v(0) \quad \text{a} \quad L(v) = - \int_0^1 v \, dx + 0,5v(0).$$

Pro aproximaci řešení této úlohy uijeme lineární splajny $\varphi_0, \dots, \varphi_5$ příslušné uzlům $x_j = 0,2j$.

Diskretizace: Funkce

$$y_G = y_0 \cdot \varphi_0 + \dots + y_4 \cdot \varphi_4 + \varphi_5$$

leží v množině W . y_G je aproximací řešení úlohy, když

$$B(y_G, \varphi_i) = L(\varphi_i) \iff \sum_{j=0}^4 y_j B(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i) - B(\varphi_5, \varphi_i)$$

pro $i = 0, \dots, 4$. Tento systém rovnic má vzhledem k (9) a (11) strukturu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} B(\varphi_0, \varphi_0) & B(\varphi_1, \varphi_0) & & & L(\varphi_0) \\ B(\varphi_0, \varphi_1) & B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_1) & & L(\varphi_1) \\ & B(\varphi_1, \varphi_2) & B(\varphi_2, \varphi_2) & B(\varphi_3, \varphi_2) & L(\varphi_2) \\ & & B(\varphi_2, \varphi_3) & B(\varphi_3, \varphi_3) & B(\varphi_4, \varphi_3) & L(\varphi_3) \\ & & & B(\varphi_3, \varphi_4) & B(\varphi_4, \varphi_4) & L(\varphi_4) - B(\varphi_5, \varphi_4) \end{array} \right],$$

Protože všechny koeficienty ve formách $B(y, v)$ a $L(v)$ jsou konstantní, platí

$$B(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} ((-25) + 25\varphi_i) dx = -5 + 2,5 = -2,5$$

pro $i = 1, \dots, 4$,

$$B(\varphi_0, \varphi_0) = 5 + 25 \int_0^{0,2} \varphi_0 dx + 0,5 = 8$$

$$B(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} (25 - 25\varphi_i) dx + \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (25 + 25\varphi_i) dx = 10$$

pro $i = 1, \dots, 4$ a

$$B(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (-25 - 5 \cdot 5\varphi_i) dx = -5 - 25 \cdot 0,1 = -7,5$$

pro $i = 0, \dots, 4$. Dále

$$L(\varphi_0) = -0,1 + 0,5 = 0,4$$

a

$$L(\varphi_i) = - \int_{0,2(i-1)}^{0,2(i+1)} \varphi_i dx = -0,2.$$

Tedy výsledný systém rovnic má tvar

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & -7,5 & & & 0,4 \\ -2,5 & 10 & -7,5 & & -0,2 \\ & -2,5 & 10 & -7,5 & -0,2 \\ & & -2,5 & 10 & -7,5 & -0,2 \\ & & & -2,5 & 10 & 7,3 \end{array} \right].$$

Jeho řešením je vektor $[0,85434; 0,85796; 0,88584; 0,92180; 0,96045]$. Toto jsou hodnoty aproximace y_G v uzlech $0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$.

1.7 Lineární konečný prvek a algoritmus MKP v 1D

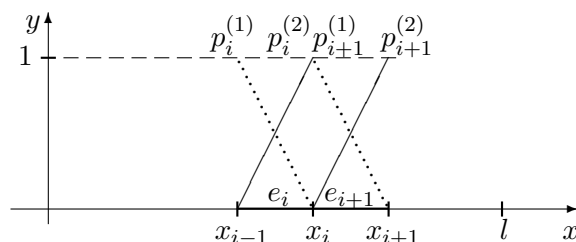
Diskretizace Galerkinovy úlohy

$$\text{najděte } y \in W \text{ tak, aby } B(y, v) = L(v) \text{ pro všechna } v \in V \quad (14)$$

metodou konečných prvků je určena dělením $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = l$. Pak je pro $i = 1, \dots, n$ konečný prvek (element) e_i určen

- intervalem $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$,
- lokálním prostorem \mathcal{P}_i^1 polynomů stupně menšího nebo rovného 1 na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a
- stupni volnosti $p(x_{i-1}), p(x_i)$, které mohou být zvoleny libovolně a určují polynom $p \in \mathcal{P}_i^1$ jednoznačně.

Pro $i = 1, \dots, n$ označíme $p_i^{(1)}, p_i^{(2)}$ bazi lokálního prostoru \mathcal{P}_i^1 takovou, že $p_i^{(1)}(x_{i-1}) = 1, p_i^{(1)}(x_i) = 0$ a $p_i^{(2)}(x_{i-1}) = 0, p_i^{(2)}(x_i) = 1$. Viz Obrázek 3.



Obrázek 3. Baze lokálních prostorů \mathcal{P}_i^1 a \mathcal{P}_{i+1}^1

Je zřejmé, že

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} p_1^{(1)}(x) & \text{pro } x \in \langle x_0, x_1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} p_i^{(2)}(x) & \text{pro } x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \\ p_{i+1}^{(1)}(x) & \text{pro } x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{pro } i = 1, \dots, n-1 \text{ a}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} p_n^{(2)}(x) & \text{pro } x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} B(\varphi_{i-1}, \varphi_i) &= B(p_i^{(1)}, p_i^{(2)}) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n, \\ B(\varphi_0, \varphi_0) &= B(p_1^{(1)}, p_1^{(1)}), \\ B(\varphi_i, \varphi_i) &= B(p_i^{(2)}, p_i^{(2)}) + B(p_{i+1}^{(1)}, p_{i+1}^{(1)}) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n-1, \\ B(\varphi_n, \varphi_n) &= B(p_n^{(2)}, p_n^{(2)}) \quad \text{a} \\ B(\varphi_{i+1}, \varphi_i) &= B(p_{i+1}^{(2)}, p_{i+1}^{(1)}) \quad \text{pro } i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned} L(\varphi_0) &= L(p_1^{(1)}), \\ L(\varphi_i) &= L(p_i^{(2)}) + L(p_{i+1}^{(1)}) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n-1 \quad \text{a} \\ L(\varphi_n) &= L(p_n^{(2)}). \end{aligned}$$

Tedy například pro $n = 2$ lze systém rovnic

$$\left[\begin{array}{ccc|c} B(\varphi_0, \varphi_0) & B(\varphi_1, \varphi_0) & & L(\varphi_0) \\ B(\varphi_0, \varphi_1) & B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_1) & L(\varphi_1) \\ & B(\varphi_1, \varphi_2) & B(\varphi_2, \varphi_2) & L(\varphi_2) \end{array} \right]$$

zapsat podrobněji

$$\left[\begin{array}{ccc|c} B(p_1^{(1)}, p_1^{(1)}) & & B(p_1^{(2)}, p_1^{(1)}) & L(p_1^{(1)}) \\ B(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}) & B(p_1^{(2)}, p_1^{(2)}) + B(p_2^{(1)}, p_2^{(1)}) & B(p_2^{(2)}, p_2^{(1)}) & L(p_1^{(2)}) + L(p_2^{(1)}) \\ & B(p_2^{(1)}, p_2^{(2)}) & B(p_2^{(2)}, p_2^{(2)}) & L(p_2^{(2)}) \end{array} \right]$$

Algoritmus sestavení matice tuhosti K a vektoru zatížení \vec{F} :

1. Vynulování matice K a vektoru \vec{F} .
2. Postupně pro $i = 1, \dots, n$ výpočet *lokální matice tuhosti a lokálního vektoru zatížení*

$$K^{(i)} = \begin{bmatrix} B(p_i^{(1)}, p_i^{(1)}) & B(p_i^{(2)}, p_i^{(1)}) \\ B(p_i^{(1)}, p_i^{(2)}) & B(p_i^{(2)}, p_i^{(2)}) \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{F}^{(i)} = \begin{bmatrix} L(p_i^{(1)}) \\ L(p_i^{(2)}) \end{bmatrix}$$

a přičtení

$$\begin{array}{ccc} K_{11}^{(i)} \text{ k } K_{i,i}, & K_{12}^{(i)} \text{ k } K_{i,i+1} & \text{a} \quad \vec{F}_1^{(i)} \text{ k } \vec{F}_i \\ K_{21}^{(i)} \text{ k } K_{i+1,i}, & K_{22}^{(i)} \text{ k } K_{i+1,i+1} & \text{a} \quad \vec{F}_2^{(i)} \text{ k } \vec{F}_{i+1} \end{array}$$

Otázky a příklady k procvičení

1. Uveďte klasickou formulaci eliptické okrajové úlohy pro ODR 2. řádu, hlavní fyzikální významy a postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost jejího řešení.
2. Popište některou fyzikální interpretaci procesu, popsaného okrajovou úlohou

a) $-0,1y'' + 2y' = 1$ v $(0, 1)$, $y(0) = 1$, $-0,1y'(1) = 2(y(1) - 0,2)$.

b) $-0,05y'' + y = x$ v $(0, 1)$, $y'(0) = 5$, $y'(1) + 10y(1) = 6$.

Těchto fyzikálních významů užitje ke schematickému znázornění grafů řešení úloh a) a b).

3. Metodou konečných prvků aproximujte řešení okrajové úlohy

a) $-0,5y'' + y' = 2$, $y(0) = -1$, $-0,4y'(1) = 2y(1)$ s krokem $h = 1/4$,

b) $-0,25y'' - y' = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ s krokem $h = 1/6$,

c) $-0,1y'' - y' = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ s krokem $h = 1/6$,

d) $-y'' - 0,2y' = 2$, $y'(0) = 2(y(0) - 0,5)$, $y(1) = 0$ s krokem $h = 1/5$.

2 Regulární oblasti a integrovatelné funkce

Tučnými symboly $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$ budeme značit body $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \dots$ z \mathbb{R}^2 a symbol \mathbf{o} rezervujeme pro *nulový bod* $(0, 0)$. Pro body \mathbf{x}, \mathbf{y} a $\delta > 0$ položíme

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad \text{a} \quad O_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}; \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta\}.$$

Množinu $O_\delta(\mathbf{x})$ nazveme δ -okolím bodu \mathbf{x} (v \mathbb{R}^2).

Definice. Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá

a) *otevřená*, když $\forall \mathbf{x} \in \Omega \exists \delta > 0 : O_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \Omega$,

b) *uzavřená*, když $\mathbb{R}^2 - \Omega$ je otevřená,

c) *ohraničená*, když $\exists \delta > 0 : \Omega \subseteq O_\delta(\mathbf{o})$,

d) *souvislá*, když její libovolné dva body lze spojit lomenou čarou v Ω a

e) *oblast*, je-li otevřená a souvislá.

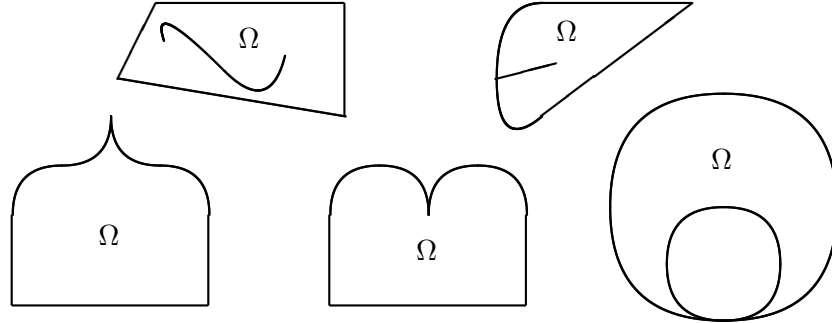
Hraniční bod množiny Ω je každý bod \mathbf{x} s vlastností

$$\forall \delta > 0 : (O_\delta(\mathbf{x}) - \{\mathbf{x}\}) \cap \Omega \neq \emptyset \quad \text{a} \quad (O_\delta(\mathbf{x}) - \{\mathbf{x}\}) \cap (\mathbb{R}^2 - \Omega) \neq \emptyset$$

Množina všech hraničních bodů Ω se nazývá *hranice* Ω a značí se $\partial\Omega$ a sjednocení $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ se nazývá *uzávěr* Ω . $\bar{\Omega}$ je nejmenší uzavřená množina, která je nadmnožinou Ω .

Definice. a) *Řez* oblasti Ω je neprázdná podmnožina v $\partial\Omega - \Omega$, jejíž všechny body jsou vnitřními body uzavěru $\bar{\Omega}$.

b) *Bod vratu* oblasti Ω je každý bod dotyku dvou různých hladkých částí hranice $\partial\Omega$, v němž jsou tečny k oběma hladkým částem totožné.



Obrázek 4. Ilustrace oblastí s řezy a s body vratu

Definice. Oblast Ω nazveme *regulární*, je-li ohraničená, hranice $\partial\Omega$ je sjednocením konečného počtu hladkých křivek a nemá řezy ani body vratu.

Definice. *Jednotková vnější normála* oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ v bodě $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ je vektor $\vec{n} = \vec{n}(\mathbf{x})$ s vlastnostmi

- \vec{n} je kolmý k $\partial\Omega$ ($\vec{n}(\mathbf{x})$ je kolmý k tečně k $\partial\Omega$ v bodu dotyku \mathbf{x}),
- \vec{n} vychází z bodu \mathbf{x} ven z Ω (existuje $\delta > 0$ tak, že $\mathbf{x} + t \cdot \vec{n} \notin \Omega$ pro všechna $t \in (0, \delta)$) a
- $|\vec{n}| = 1$.

Regulární oblast má jednoznačně určenou jednotkovou vnější normálu ve všech bodech $\partial\Omega$ s případnou výjimkou konečně mnoha bodů.

Definice. (Prostory integrovatelných funkcí na regulární oblasti) Pro danou regulární oblast Ω se značí

- $L_2(\Omega)$ množina reálných funkcí u takových, že odmocnina Lebesgueova integrálu

$$\|u\|_0 = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x}}$$

existuje a má konečnou hodnotu,

- $H^1(\Omega)$ množina funkcí u , pro něž u , $\partial u/\partial x_1$ a $\partial u/\partial x_2$ leží v $L_2(\Omega)$ a
- $H^2(\Omega)$ množina funkcí u , pro něž u , $\partial u/\partial x_1$, $\partial u/\partial x_2$, $\partial^2 u/\partial x_1^2$, $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2$ a $\partial^2 u/\partial x_2^2$ leží v $L_2(\Omega)$.

Množiny funkcí $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ a $H^2(\Omega)$ jsou funkční prostory (jsou například uzavřené vůči tvorbě lineárních kombinací funkcí) a číslo $\|u\|_0$ je norma funkce u

v prostoru $L_2(\Omega)$. Podobně

$$\|u\|_1 = \sqrt{\int_{\Omega} [u^2 + (\partial u/\partial x_1)^2 + (\partial u/\partial x_2)^2] d\mathbf{x}}$$

je norma funkce u v prostoru $H^1(\Omega)$.

Poznámka. (Prostory integrovatelných funkcí na ohraničeném intervalu) Pro libovolný ohraničený interval (a, b) značí $L_2(a, b)$ množinu všech funkcí $y = y(x)$ takových, že

$$\|y\|_0 = \sqrt{\int_a^b y^2 dx}$$

existuje a má konečnou hodnotu. Pro libovolnou ohraničenou, po částech hladkou křivku Γ označíme $L_2(\Gamma)$ množinu všech funkcí $y = y(x)$ takových, že odmocnina z křivkového Lebesgueova integrálu

$$\|y\|_0 = \sqrt{\int_{\Gamma} y^2 ds}$$

existuje a má konečnou hodnotu. Stejně jako v dimenzi 2, i množiny $L_2(a, b)$ a $L_2(\Gamma)$, zejména $L_2(\partial\Omega)$ pro regulární oblast Ω , jsou funkční prostory s normou $\| \cdot \|_0$. Dobrou představu o funkcích, které leží v těchto prostorech poskytují funkce po částech spojitě, neboť $PC(a, b) \subset L_2(a, b)$. Analogicky jako v dimenzi 2 je definován funkční prostor $H^1(a, b)$ s normou $\| \cdot \|_1$. Opět $PC^1(a, b) \subset H^1(a, b)$.

Předpis, který k funkcím u, v definovaným na regulární oblasti Ω , ohraničeném intervalu (a, b) případně na ohraničené po částech hladké křivce Γ přiřadí číslo

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv d\mathbf{x}, \quad \langle u, v \rangle = \int_a^b uv dx \quad \text{případně} \quad \langle u, v \rangle = \int_{\Gamma} uv ds$$

je skalární součin funkcí. Díky Schwarzově nerovnosti $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_0 \|v\|_0$ je tento skalární součin definován na prostorech $L_2(\Omega)$, $L_2(a, b)$ a $L_2(\Gamma)$.

Je zřejmé, že $C^k(\overline{\Omega}) \subset H^k(\Omega)$ pro $k = 0, 1, 2$. Otázka je, zda z integrability derivací funkcí plyne spojitost funkcí.

Věta 1. (Sobolevovy věty o vnoření) Platí

$$H^1(a, b) \subset C(a, b) \quad \text{pro libovolná} \quad -\infty < a < b < \infty \quad \text{a} \\ H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \quad \text{pro každou regulární oblast} \quad \Omega.$$

Z tvrzení Věty 1 zejména plyne, že každá funkce z $H^2(\Omega)$ je definovaná a spojitá na celé hranici $\partial\Omega$. Otázku, jaké vlastnosti na hranici $\partial\Omega$ mají funkce z $H^1(\Omega)$, zodpovídá Věta 2.

Věta 2. (Věta o stopách) Je-li Ω regulární oblast, pak existuje jediný lineární operátor

$$\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L_2(\partial\Omega)$$

takový, že $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$ pro všechna $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ a existuje konstanta $C > 0$ tak, že

$$\|\gamma(u)\|_0 \leq C\|u\|_1 \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Funkce $\gamma(u)$ se nazývá *stopa* funkce u . Místo $\gamma(u)$ píšeme u . Množina všech stop funkcí z $H^1(\Omega)$ je funkční prostor $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Je zřejmé, že $H^{1/2}(\partial\Omega) \subseteq L_2(\partial\Omega)$.

Definice. Pro regulární oblast Ω a funkci $u \in H^1(\Omega)$ označíme $\nabla u = \text{grad } u = [\partial u/\partial x_1, \partial u/\partial x_2]^\top$.

Pro libovolný jednotkový vektor $\vec{s} = [s_1, s_2]^\top$ a funkci $u \in H^1(\Omega)$ platí:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial u}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} s_2 = \nabla u \cdot \vec{s}.$$

Definice. Pro libovolnou vektorovou funkci $\vec{u}(\mathbf{x}) = [u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x})]^\top$ s $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ označíme

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

a $\text{div } \vec{u}$ nazveme *divergence* vektorové funkce u .

Je-li \vec{u} vektor toku nestlačitelné kapaliny, pak $\text{div } \vec{u} = 0$.

Poznámka. Jestliže $u \in H^2(\Omega)$, pak

$$\text{div } \nabla u = \text{div} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right]^\top = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \equiv \Delta u$$

Operátor, který k funkci u přiřazuje Δu se nazývá *Laplaceův operátor*.

Věta 3. (Věta o divergenci) Pro libovolnou regulární oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ a vektorovou funkci $\vec{u}(\mathbf{x})$ se složkami z $H^1(\Omega)$ platí

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds. \quad (1)$$

Poznámka. Položíme-li v (1) $\vec{n}(\mathbf{x}) = [n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x})]^\top$ a postupně $\vec{u}(\mathbf{x}) = [v(\mathbf{x})w(\mathbf{x}), 0]^\top$, $\vec{u}(\mathbf{x}) = [0, v(\mathbf{x})w(\mathbf{x})]^\top$ pro funkce $v, w \in H^1(\Omega)$, obdržíme *Greenovy formule*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} w \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} vw \cdot n_1 \, ds - \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_1} \, d\mathbf{x}, \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_2} w \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} vw \cdot n_2 \, ds - \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_2} \, d\mathbf{x}. \quad (3)$$

Věta 4. (Greenova věta) Jestliže Ω je regulární oblast, $v \in H^1(\Omega)$ a $w \in H^2(\Omega)$, pak

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \, ds - \int_{\Omega} v \cdot \Delta w \, d\mathbf{x}. \quad (4)$$

Důkaz. Užitím Greenových formulí (2) a (3) získáme $\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} =$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + v \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 \right) ds \\ &- \int_{\Omega} \left(v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \, ds - \int_{\Omega} v \Delta w \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Otázky a příklady k procvičení

1. Rozhodněte, zda množina

- a) $\Omega = [(1, 2) \times (1, 2)] \cup [(2, 4) \times (2, 3)]$
- b) $\Omega = \{\mathbf{x}; 0 < x_1 < \infty \text{ a } 0 < x_2 < 1/x_1\}$
- c) $\Omega = \{\mathbf{x}; 0 < \|\mathbf{x}\|_{\infty} < 1\}$
- d) $\Omega = \{\mathbf{x}; 0 < |x_1| < 1 \text{ a } -1 < x_2 < 1\}$

je otevřená, uzavřená, ohraničená, souvislá nebo regulární.

2. Ukažte, že Věta o divergenci je důsledkem Greenových formulí.

3 Rovnice vedení tepla

3.1 Odvození rovnice vedení tepla

Označíme $u(\mathbf{x}, t)$ [K] teplotu v bodu $\mathbf{x} \in \Omega$ a čase t [s] a uijeme Fourierova zákona pro intenzitu toku tepla w [$J m^{-1} s^{-1}$] ve směru jednotkového vektoru \vec{n} [m] ve tvaru

$$w = -\lambda_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}.$$

Zde je λ_0 [$J s^{-1} K^{-1}$] koeficient tepelné vodivosti. Označme $f_0(\mathbf{x}, t)$ [$J m^{-2} s^{-1}$] intenzitu zdrojů tepla a $\vec{v} = [v_1, v_2]^T$ [$m s^{-1}$] vektor rychlosti toku látky v Ω . Pro

libovolnou regulární podoblast D v Ω a časový interval $(t, t + \delta t)$ [s] malé délky sformulujeme zákon zachování (tepelné) energie. Označíme

$$Q_1 \doteq \int_D f_0(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \cdot \delta t \quad [J]$$

množství tepla, vzniklé ve zdrojích v D za dobu δt [s],

$$Q_2 \doteq \int_D c\rho \frac{\partial u}{\partial t} d\mathbf{x} \cdot \delta t \quad [J]$$

množství tepla, spotřebované na zvýšení teploty látky o hustotě ρ [$kg\ m^{-2}$] se specifickým teplem c [$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$] v oblasti D za dobu δt ,

$$Q_3 \doteq - \int_{\partial D} \lambda_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \cdot \delta t \quad [J]$$

množství tepla, které proteče přes hranici ∂D za dobu δt ven z oblasti D (zde je \vec{n} jednotková vnější normála k hranici ∂D) a

$$Q_4 \doteq \int_{\partial D} c\rho u \vec{v} \cdot \vec{n} ds \cdot \delta t \quad [J]$$

množství tepla, přenesené ven z D látkou o teplotě u , tekoucí rychlostí \vec{v} za dobu δt . Zákon zachování energie říká, že za dobu δt množství tepla Q_1 , vzniklé v D ve zdrojích je stejné jako součet množství tepla Q_2 , které je spotřebováno na změnu teploty v D , množství tepla Q_3 , které přestoupí přes hranici ∂D ven z D a množství tepla Q_4 , které je přeneseno ven z D v tekoucí látce. Tedy

$$Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q_1,$$

tj.

$$\int_D c\rho \frac{\partial u}{\partial t} d\mathbf{x} - \int_{\partial D} \lambda_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds + \int_{\partial D} c\rho u \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_D f_0(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Užitím Věty o divergenci vznikne identita

$$\int_D \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_0 \nabla u) + \operatorname{div}(c\rho u \vec{v}) \right) d\mathbf{x} = \int_D f_0(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (1)$$

Předpokládejme nyní, že

- a) veličiny c a ρ jsou na Ω konstantní a
- b) integrandy na obou stranách identity jsou spojitě.

Z předpokladu b) a skutečnosti, že identita (1) je splněna pro všechny regulární podoblasti D v Ω plyne, že integrandy na obou stranách (1) jsou shodné v Ω a předpoklad a) umožňuje oba integrandy v (1) vydělit konstantou $c\rho$. Vznikne diferenciální rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) + \operatorname{div}(u\vec{v}) = f(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

pro všechna $\mathbf{x} \in \Omega$ a všechny časové okamžiky t . Zde $\lambda = \lambda_0/(c\rho)$ a $f = f_0/(c\rho)$.

Poznámka. Je-li proudění nestlačitelné, tj. $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, pak

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u\vec{v}) &= \frac{\partial(uv_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(uv_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}v_1 + u\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}v_2 + u\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ &= \vec{v} \cdot \nabla u + u \operatorname{div} \vec{v} = \vec{v} \cdot \nabla u, \end{aligned}$$

takže rovnice (2) nabude tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) + \vec{v} \cdot \nabla u = f(\mathbf{x}, t). \quad (3)$$

3.2 Klasická formulace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici

Nejprve se budeme zabývat procesem ustáleného, tj. *stacionárního vedení tepla* charakterizovaného podmínkami $\partial u/\partial t = 0$, $f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})$ a dále budeme předpokládat, že $\lambda = \operatorname{const} > 0$ a vektor toku $\vec{v} = \vec{0}$. Pak lze rovnici (3) vydělit konstantou λ a vznikne tato *Poissonova rovnice*

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4)$$

Pro jednoznačnost řešení je nutno na hranici $\partial\Omega$ zadat okrajové podmínky. Zabývejme se nejprve kombinací *Dirichletovy a homogenní Neumannovy* okrajové podmínky

$$u = g_0 \text{ na } \Gamma_D \quad \text{a} \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ na } \Gamma_N \quad (5)$$

pro $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ a $\Gamma_D \neq \emptyset$.

Řešením diferenciální rovnice (4) je funkce $u = u(\mathbf{x})$, pro niž je rovnice (4) splněna ve všech bodech z Ω . Protože $f \in C(\bar{\Omega})$, musí být Δu spojitá funkce. Odtud a z faktu, že Δu obsahuje druhé parciální derivace plyne $u \in C^2(\bar{\Omega})$. *Klasická formulace* problému (4), (5) je tedy úloha:

Pro dané funkce $f \in C(\bar{\Omega})$ a $g_0 \in C^2(\Gamma_D)$ najděte funkci $u \in C^2(\bar{\Omega})$ takovou, že jsou splněny rovnice (4) a okrajové podmínky (5).

3.3 Variační formulace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici

Variační nebo též Galerkinovu či slabou formulaci úlohy (4), (5) odvodíme vynásobením obou stran rovnice (4) tzv. *testovací funkcí* v s vlastnostmi

$$v = 0 \text{ na } \Gamma_D \text{ a } v \in C^1(\bar{\Omega}) \quad (6)$$

a jejich integrací přes Ω . Pomocí Greenovy formule pak obdržíme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \Delta u v d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \right) v ds + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

neboť $v = 0$ na Γ_D a $\partial u / \partial \vec{n} = 0$ na Γ_N . Získali jsme identitu

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} \quad (7)$$

a tím jsme dokázali, že klasické řešení u úlohy (4),(5) splňuje i identitu (7) pro každou funkci v s vlastnostmi (6). Naopak lze ukázat, že funkce $u \in C^2(\bar{\Omega})$, která splňuje (7) pro funkce v s vlastnostmi (6), vyhovuje i rovnici (4) a podmínce $\partial u / \partial \vec{n}|_{\Gamma_N} = 0$. Jestliže navíc $u = g_0$ na Γ_D , pak je u řešením úlohy (4), (5).

Formulace (7) umožňuje podstatně zeslabit požadavky na řešení u i na funkce f, g_0 z (4), (5). Z definice funkčních prostorů $L_2(\Omega)$ a $H^1(\Omega)$ plyne, že levá případně pravá strana identity (7) má dobře definovanou konečnou hodnotu, jestliže $u, v \in H^1(\Omega)$ případně $f, v \in L_2(\Omega)$. *Množinu přípustných řešení* můžeme tedy definovat jako

$$W = \{w \in H^1(\Omega); w = g_0 \text{ na } \Gamma_D\}$$

a množinu *testovacích funkcí* jako

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ na } \Gamma_D\}.$$

Podmínky $w = g_0$ na Γ_D a $v = 0$ na Γ_D jsou korektně formulovány v důsledku Věty o stopách za slabého předpokladu $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$. Pak je *variační (Galerkinovou, slabou) formulací* problému (4), (5) úloha:

$$\text{Najděte } u \in W \text{ tak, aby } B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \quad (8)$$

kde

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} \quad \text{a} \quad L(v) = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}.$$

Všimněte si, že v této formulaci se Neumannova okrajová podmínka nevyskytuje. Okrajové podmínky s touto vlastností se nazývají *přirozené*. Naproti tomu Dirichletova podmínka je v definici množiny přípustných řešení W explicitně uvedena. Takovéto okrajové podmínky se nazývají *podstatné*.

Lze snadno ověřit, že pro libovolná reálná čísla a_1, a_2, b_1, b_2 a funkce $u_1, u_2, v, u, v_1, v_2 \in H^1(\Omega)$ platí

$$\begin{aligned} B(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) &= a_1 B(u_1, v) + a_2 B(u_2, v), \\ B(u, b_1 v_1 + b_2 v_2) &= b_1 B(u, v_1) + b_2 B(u, v_2), \\ L(b_1 v_1 + b_2 v_2) &= b_1 L(v_1) + b_2 L(v_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Proto říkáme, že funkcionál B je *bilinéární forma* a L je *lineární forma*.

Otázky a příklady k procvičení

1. Variační formulaci úlohy (4), (5) odvoďte dosazením vyjádření Δu z rovnice (4) do identity z Greenovy věty.
2. Ověřte bilinearitu a linearitu (9) funkcionálů B a L .

4 Diskretizace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici metodou konečných prvků (MKP)

V této kapitole se seznámíme s postupem výpočtu přibližného řešení variační úlohy (3.8) a tedy i přibližného řešení klasicky formulovaného problému.

4.1 Po částech lineární funkce

Předpokládejme, že regulární oblast Ω je *polygonální*, tj. že hranice $\partial\Omega$ je polygon a pokryjme uzávěr $\bar{\Omega}$ triangulací:

Definice. Množina \mathcal{T} trojúhelníků (ty odpovídají konečným prvkům, elementům) se nazývá *triangulace* polygonální oblasti Ω , když

- a) $\bigcup_{e \in \mathcal{T}} e = \bar{\Omega}$ a
- b) libovolné dva různé trojúhelníky z \mathcal{T} jsou disjunktní nebo mají společný vrchol nebo mají společnou stranu.

Vrcholy trojúhelníků budeme nazývat *uzly* nebo *vrcholy triangulace* a budeme je značit symboly $\mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(N)}$.

Funkci, která je na každém elementu $e \in \mathcal{T}$ lineární, tj. tvaru $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$ pro $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a globálně, tj. na regulární oblasti Ω je spojitá, budeme říkat *po částech*

lineární. Charakterizaci funkcí lineárních na trojúhelníkových triangulacích, které leží v prostoru $H^1(\Omega)$, poskytuje toto tvrzení:

Věta 1. Uvažme polygonální regulární oblast Ω , triangulaci \mathcal{T} oblasti Ω a funkci v , lineární na každém trojúhelníku z \mathcal{T} . Pak

$$v \in H^1(\Omega) \text{ právě když } v \in C(\Omega).$$

Každá po částech lineární funkce v je jednoznačně určena svými hodnotami v_i ve vrcholech $\mathbf{q}^{(i)}$ pro $i = 1, \dots, N$. Její graf je nad každým elementem $e \in \mathcal{T}$ částí roviny. Prostor všech po částech lineárních funkcí budeme značit Z_h . Funkce ze Z_h mají na každém elementu $e \in \mathcal{T}$ konstantní parciální derivace; říkáme, že tyto derivace jsou *po částech konstantní*; obecně nejsou spojité na celé oblasti Ω . Každému vrcholu triangulace $\mathbf{q}^{(i)}$ je přiřazena funkce φ_i z Z_h předpisem

$$\varphi_i(\mathbf{q}^{(i)}) = 1 \text{ a } \varphi_i(\mathbf{q}^{(j)}) = 0 \text{ pro všechna } j \neq i.$$

Libovolnou funkci $v \in Z_h$ lze tedy zapsat ve tvaru

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(\mathbf{x}), \text{ kde } v_i = v(\mathbf{q}^{(i)}). \quad (1)$$

Odtud plyne, že dimenze prostoru Z_h je N a funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ tvoří jeho bazi. Všimněte si, že bázové funkce φ_i jsou rovny nule na všech elementech e , které nemají vrchol $\mathbf{q}^{(i)}$.

4.2 Metoda konečných prvků

Seznámíme se s MKP pro aproximaci řešení úlohy (3.8) za předpokladů, že $g_0 = 0$ a že regulární oblast Ω je polygonální. Pokryjme $\bar{\Omega}$ triangulací \mathcal{T} takovou, že mezi jejími vrcholy jsou koncové body všech úseček tvořících polygon $\partial\Omega$ a všechny koncové body části hranice Γ_D . Za účelem zjednodušení zápisů budeme vždy vrcholy číslovat tak, aby čísla $1, \dots, M$ byla přiřazena vrcholům, které neleží na $\bar{\Gamma}_D$ a $M + 1, \dots, N$ vrcholům z $\bar{\Gamma}_D$.

Označme V_h prostor všech po částech lineárních funkcí, které jsou nulové na Γ_D . Díky značení (1) lze prostor V_h charakterizovat takto:

$$V_h = \left\{ v; v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M v_i \varphi_i(\mathbf{x}) \right\}. \quad (2)$$

Tato charakterizace a (1) ukazují, že V_h je podprostorem v Z_h . Řešení úlohy (3.8) budeme značit u a nazývat variační, slabé případně Galerkinovo řešení.

Přibližné řešení U úlohy (3.8) budeme tedy hledat jako funkci ze Z_h , splňující okrajovou podmínku $U = 0$ na Γ_D . Pak $U \in V_h$ a, označíme-li $U_j = U(\mathbf{q}^{(j)})$, je podle (2)

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M U_j \varphi_j(\mathbf{x}).$$

Funkci U nazveme *přibližným řešením* úlohy (3.8) metodou konečných prvků, když

$$B(U, v) = L(v) \quad \text{pro všechna } v \in V_h. \quad (3)$$

Nekonečná soustava rovnic (3) je ekvivalentní s rovnicemi

$$B(U, \varphi_i) = L(\varphi_i) \quad \text{pro } i = 1, \dots, M. \quad (4)$$

Skutečně, protože podmínka (4) je důsledkem (3), stačí ukázat, že z (4) plyne (3): Zvolme libovolnou funkci $v \in V_h$. Dle (2) je $v = \sum_{i=1}^M v_i \varphi_i$ a tedy, vzhledem k bilinearitě formy B , (4) a linearitě formy L platí

$$B(U, v) = \sum_{i=1}^M v_i B(U, \varphi_i) = \sum_{i=1}^M v_i L(\varphi_i) = L(v).$$

Poznámka 1. V roce 1915 zveřejnil ruský inženýr Boris Galerkin článek, v němž prezentoval metodu řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice (konkrétně deformační variantu úlohy pružnosti) metodou, využívající nové formulace, dnes známé jako Galerkinova případně slabá formulace. Až do vzniku MKP nebyl známý obecný postup, jak tuto formulaci diskretizovat. Diskretizace byly navrhovány jen pro jednotlivé speciální případy a, jak se ukázalo později, matice výsledných systémů lineárních rovnic nebyly dobře podmíněné. MKP přinesla obecné konstrukce bázevých funkcí a algoritmizaci tak, že výsledný algoritmus je snadno programovatelný na počítačích a matice výsledných systémů lineárních rovnic jsou řídké a dobře podmíněné i pro velké počty rovnic.

Nyní ukážeme, že funkce U je soustavami rovnic (3) nebo (4) jednoznačně určena. Najdeme maticový zápis rovnic (3) a z něj vyplyne, že k určení hodnot U_j je třeba řešit systém lineárních rovnic se symetrickou pozitivně definitní maticí.

Dosadíme-li do (3)

$$U = \sum_{j=1}^M U_j \varphi_j \quad \text{a} \quad v = \sum_{i=1}^M v_i \varphi_i,$$

dostaneme

$$B(U, v) = B\left(\sum_{j=1}^M U_j \varphi_j, \sum_{i=1}^M v_i \varphi_i\right) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M U_j v_i B(\varphi_j, \varphi_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^M v_i U_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^M v_i k_{ij} U_j \text{ pro} \\
k_{ij} &= B(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\mathbf{x} = k_{ji}, \\
L(v) &= L\left(\sum_{i=1}^M v_i \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^M v_i \int_{\Omega} f \varphi_i d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^M F_i v_i \text{ pro} \\
F_i &= L(\varphi_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Zavedme označení $K = (k_{ij})_{i,j=1}^M$, $\vec{U} = [U_1, \dots, U_M]^T$, $\vec{v} = [v_1, \dots, v_M]^T$, $\vec{F} = [F_1, \dots, F_M]^T$. Pak $B(U, v) = \vec{v}^T K \vec{U}$, $L(v) = \vec{v}^T \vec{F}$ a tedy systém rovnic (3) se dá maticově zapsat

$$\vec{v}^T (K \vec{U} - \vec{F}) = 0 \text{ pro všechna } \vec{v} \in \mathbb{R}^M.$$

Tato podmínka je splněna tehdy a jen tehdy, když

$$K \vec{U} = \vec{F}. \quad (5)$$

K se nazývá *matice tuhosti*. Ukázali jsme, že matice K je symetrická. Dále je řídká, neboť $k_{ij} = 0$ pro všechny dvojice indexů, pro něž $\mathbf{q}^{(i)}$ a $\mathbf{q}^{(j)}$ nejsou vrcholy téhož trojúhelníka z \mathcal{T} a pásová. Dále je dobře podmíněná i pro velké počty neznámých. V našem případě Laplaceova operátoru je matice K i symetrická pozitivně definitní, neboť

$$\vec{v}^T K \vec{v} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \|\nabla v\|_2^2 d\mathbf{x} > 0$$

pro všechna $\vec{v} \neq \vec{0}$. \vec{F} se nazývá *vektor zatížení*.

4.3 Algoritmizace

Vysvětlíme algoritmus sestavení systému rovnic (5).

1. *Triangulace oblasti $\bar{\Omega}$* : Vrcholy triangulace očíslijme $\mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(N)}$ tak, že $\mathbf{q}^{(M+1)}, \dots, \mathbf{q}^{(N)}$ jsou právě všechny vrcholy na hranici $\bar{\Gamma}_D$ a trojúhelníkové elementy očíslijme e_1, \dots, e_R . Triangulace je určena dvěma číselnými soubory: *Soubor vrcholů* je tvořen záznamy

$$i \text{ (číslo vrcholu), } q_1^{(i)}, q_2^{(i)} \text{ (souřadnice vrcholu } \mathbf{q}^{(i)})$$

pro $i = 1, \dots, N$ a *soubor trojúhelníků* je tvořen záznamy

$$i \text{ (číslo trojúhelníka), } j, k, m \text{ (indexy vrcholů } e_i = \overline{\mathbf{q}^{(j)}\mathbf{q}^{(k)}\mathbf{q}^{(m)}})$$

pro $i = 1, \dots, R$.

2. *Výpočet prvků matice tuhosti:* Prvky matice K nikdy nepočítáme dosazením do vzorce

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\mathbf{x},$$

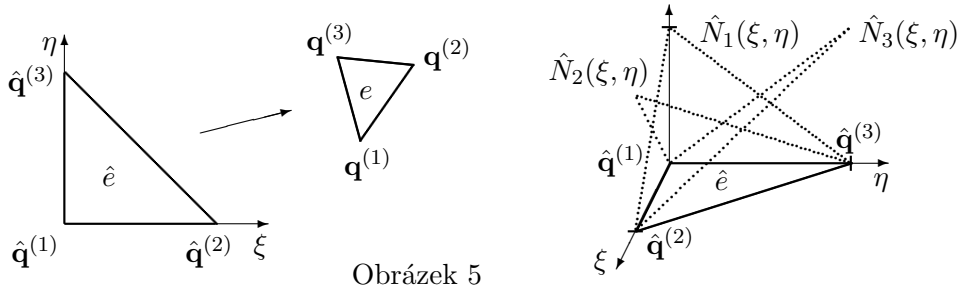
ale tzv. *kondenzací*, spočívající v tom, že integrál

$$\vec{v}^T K \vec{U} = B(U, v) = \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \sum_{e \in \mathcal{T}} \int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x}$$

vypočítáme jako součet integrálů $\int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x}$ přes všechny elementy $e \in \mathcal{T}$.

2.1. *Referenční element \hat{e} :* Pro element $e = \overline{\mathbf{q}^{(j)}\mathbf{q}^{(k)}\mathbf{q}^{(m)}}$ budeme příslušný integrál počítat transformací na tzv. *referenční element \hat{e}* s vrcholy $\hat{\mathbf{q}}^{(1)} = (0, 0)$, $\hat{\mathbf{q}}^{(2)} = (1, 0)$, $\hat{\mathbf{q}}^{(3)} = (0, 1)$ v kartézské souřadné soustavě s osami ξ, η . Pro jednoduchost označme vrcholy elementu e lokálně $\mathbf{q}^{(1)}$, $\mathbf{q}^{(2)}$ a $\mathbf{q}^{(3)}$. Transformace

$$(\xi, \eta) \in \hat{e} \mapsto \mathbf{x}(\xi, \eta) : \begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= q_1^{(1)} + (q_1^{(2)} - q_1^{(1)})\xi + (q_1^{(3)} - q_1^{(1)})\eta \\ x_2(\xi, \eta) &= q_2^{(1)} + (q_2^{(2)} - q_2^{(1)})\xi + (q_2^{(3)} - q_2^{(1)})\eta \end{aligned} \quad (6)$$



Obrázek 5

zobrazuje referenční element \hat{e} vzájemně jednoznačně na element e tak, že $\hat{\mathbf{q}}^{(i)}$ se zobrazuje na $\mathbf{q}^{(i)}$ pro $i = 1, 2, 3$. Tuto transformaci lze zapsat i ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \sum_{r=1}^3 q_1^{(r)} \hat{N}_r(\xi, \eta) \\ x_2(\xi, \eta) &= \sum_{r=1}^3 q_2^{(r)} \hat{N}_r(\xi, \eta) \end{aligned}$$

pro $\hat{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$, $\hat{N}_2(\xi, \eta) = \xi$, $\hat{N}_3(\xi, \eta) = \eta$. Všimněte si, že lineární funkce \hat{N}_r má ve vrcholu $\hat{\mathbf{q}}^{(r)}$ hodnotu 1 a ve zbývajících vrcholech elementu \hat{e} má hodnotu 0 pro $r = 1, 2, 3$. Viz Obr. 5.

Transformací (6) přechází funkce $v \in V_h$ pro $\mathbf{x} \in e$ na funkci

$$\hat{v}(\xi, \eta) = v(\mathbf{x}(\xi, \eta)) \quad \text{pro } (\xi, \eta) \in \hat{e}.$$

Protože (6) je lineární transformace vzhledem ke ξ, η a v je lineární polynom v x_1, x_2 na e , je $\hat{v}(\xi, \eta)$ lineární polynom v ξ, η . Analogicky je transformace

$$\hat{U}(\xi, \eta) = U(\mathbf{x}(\xi, \eta))$$

lineárního polynomu $U(\mathbf{x})$ na e lineárním polynomem v ξ, η na \hat{e} . Tedy

$$\hat{v}(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^3 v_r \hat{N}_r(\xi, \eta), \quad \hat{U}(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^3 U_r \hat{N}_r(\xi, \eta) \quad (7)$$

Veličiny U_1, U_2, U_3 se nazývají *stupně volnosti* elementu.

2.2.1. *Výpočet integrálu $\int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x}$ transformací na referenční element:*
Budeme používat tohoto přesnějšího značení operátoru gradientu:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \hat{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{bmatrix}.$$

Transformací (6) proměnných (x_1, x_2) na (ξ, η) vznikne

$$\int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x} = |\det J_e| \int_{\hat{e}} \hat{\nabla} U \cdot \hat{\nabla} v d\xi d\eta \quad \text{a} \quad J_e = \begin{bmatrix} q_1^{(2)} - q_1^{(1)} & q_1^{(3)} - q_1^{(1)} \\ q_2^{(2)} - q_2^{(1)} & q_2^{(3)} - q_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

je *Jacobiova matice* transformace (6). Platí:

$$\hat{\nabla} \hat{v} = \begin{bmatrix} v_2 - v_1 \\ v_3 - v_1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \hat{\nabla} \hat{U} = \begin{bmatrix} U_2 - U_1 \\ U_3 - U_1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\hat{\nabla} v = (J_e^\top)^{-1} \hat{\nabla} \hat{v} \quad \text{a} \quad \hat{\nabla} U = (J_e^\top)^{-1} \hat{\nabla} \hat{U}. \quad (9)$$

Tvrzení (8) vznikne výpočtem parciálních derivací vyjádření (7) a tvrzení (9) vznikne tímto užitím řetězového pravidla:

$$\hat{\nabla} \hat{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} v(\mathbf{x}(\xi, \eta)) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} v(\mathbf{x}(\xi, \eta)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} (q_1^{(2)} - q_1^{(1)}) + \frac{\partial v}{\partial x_2} (q_2^{(2)} - q_2^{(1)}) \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} (q_1^{(3)} - q_1^{(1)}) + \frac{\partial v}{\partial x_2} (q_2^{(3)} - q_2^{(1)}) \end{bmatrix} = J_e^\top \hat{\nabla} v.$$

a tedy $\hat{\nabla} v = (J_e^\top)^{-1} \hat{\nabla} \hat{v}$. $\hat{\nabla} U = (J_e^\top)^{-1} \hat{\nabla} \hat{U}$ lze ověřit záměnou U za v v předchozí úvaze. Pak

$$\begin{aligned} \int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x} &= \int_e \nabla v \cdot \nabla U d\mathbf{x} = |\det J_e| \int_{\hat{e}} (\hat{\nabla} v)^\top \hat{\nabla} U d\xi d\eta \\ &= |\det J_e| \int_{\hat{e}} (\hat{\nabla} \hat{v})^\top J_e^{-1} (J_e^\top)^{-1} \hat{\nabla} \hat{U} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2} |\det J_e| [v_2 - v_1, v_3 - v_1] J_e^{-1} (J_e^\top)^{-1} \begin{bmatrix} U_2 - U_1 \\ U_3 - U_1 \end{bmatrix} \\ &= [v_1, v_2, v_3] K^e \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = (\vec{v}^e)^\top K^e \vec{U}^e \end{aligned}$$

pro symetrickou lokální matici tuhosti K^e elementu e s prvky

$$\begin{aligned} k_{11}^e &= a_2^e + a_3^e & k_{12}^e &= -a_3^e & k_{13}^e &= -a_2^e \\ k_{22}^e &= a_3^e + a_1^e & k_{23}^e &= -a_1^e & & \\ k_{33}^e &= a_1^e + a_2^e & & & & \end{aligned}$$

Zde

$$\begin{aligned} a_1^e &= \frac{1}{2|\det J_e|} \left[(q_1^{(1)} - q_1^{(2)})(q_1^{(1)} - q_1^{(3)}) + (q_2^{(1)} - q_2^{(2)})(q_2^{(1)} - q_2^{(3)}) \right] \\ a_2^e &= \frac{1}{2|\det J_e|} \left[(q_1^{(2)} - q_1^{(3)})(q_1^{(2)} - q_1^{(1)}) + (q_2^{(2)} - q_2^{(3)})(q_2^{(2)} - q_2^{(1)}) \right] \\ a_3^e &= \frac{1}{2|\det J_e|} \left[(q_1^{(3)} - q_1^{(1)})(q_1^{(3)} - q_1^{(2)}) + (q_2^{(3)} - q_2^{(1)})(q_2^{(3)} - q_2^{(2)}) \right] \end{aligned}$$

a $\det J_e = (q_1^{(2)} - q_1^{(1)})(q_2^{(3)} - q_2^{(1)}) - (q_1^{(3)} - q_1^{(1)})(q_2^{(2)} - q_2^{(1)})$.

2.2.2. *Přímý výpočet integrálu $\int_e \nabla U \cdot \nabla v dx$ pro $e = \overline{\mathbf{q}^{(1)}\mathbf{q}^{(2)}\mathbf{q}^{(3)}}$:* Nejprve si všimněme, že plocha $pl(e)$ elementu e je

$$pl(e) = \int_e d\mathbf{x} = |\det J_e| \int_{\hat{e}} d\xi d\eta = \frac{1}{2} |\det J_e|$$

a pro $i = 1, 2, 3$ označme $N_i(\mathbf{x})$ funkci, lineární na e , určenou předpisem

$$N_i(\mathbf{q}^{(i)}) = 1 \quad \text{a} \quad N_i(\mathbf{q}^{(j)}) = 0 = N_i(\mathbf{q}^{(k)}).$$

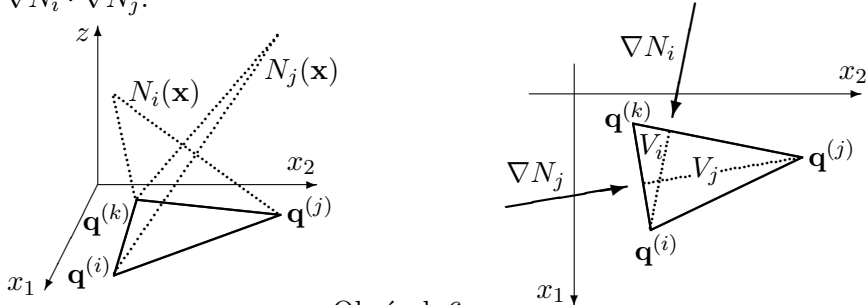
Pak je pro $\mathbf{x} \in e$

$$U(\mathbf{x}) = (U_1 N_1 + U_2 N_2 + U_3 N_3)(\mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}) = (v_1 N_1 + v_2 N_2 + v_3 N_3)(\mathbf{x})$$

a tedy

$$\begin{aligned} \int_e \nabla U \cdot \nabla v dx &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_i U_j \int_e \nabla N_i \cdot \nabla N_j dx \\ &= \frac{1}{2} |\det J_e| [v_1, v_2, v_3] \begin{bmatrix} \nabla N_1 \cdot \nabla N_1 & \nabla N_1 \cdot \nabla N_2 & \nabla N_1 \cdot \nabla N_3 \\ \nabla N_2 \cdot \nabla N_1 & \nabla N_2 \cdot \nabla N_2 & \nabla N_2 \cdot \nabla N_3 \\ \nabla N_3 \cdot \nabla N_1 & \nabla N_3 \cdot \nabla N_2 & \nabla N_3 \cdot \nabla N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Výpočet $\nabla N_i \cdot \nabla N_j$:



Obrázek 6

Užijeme-li značení z Obr. 6, pak

$$\text{pl}(e) = \frac{1}{2} |\det J_e| = \frac{1}{2} |\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}| V_i \quad \text{a tedy} \quad |\nabla N_i| = \frac{1}{V_i} = \frac{|\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}|}{|\det J_e|}.$$

Potom pro $i = 1, 2, 3$ platí

$$\nabla N_i \cdot \nabla N_i = |\nabla N_i|^2 = \frac{1}{V_i^2} = \frac{|\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}|^2}{(\det J_e)^2}$$

a pro libovolná $i \neq j$ je $\cos(\nabla N_i, \nabla N_j) = \cos(\overrightarrow{\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}}, \overrightarrow{\mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(i)}})$, takže

$$\begin{aligned} \nabla N_i \cdot \nabla N_j &= |\nabla N_i| |\nabla N_j| \cos(\nabla N_i, \nabla N_j) \\ &= \frac{|\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}|}{|\det J_e|} \cdot \frac{|\mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(i)}|}{|\det J_e|} \cdot \cos(\overrightarrow{\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}}, \overrightarrow{\mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(i)}}) \\ &= \frac{1}{(\det J_e)^2} \overrightarrow{\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(i)}}. \end{aligned}$$

Odvození lokální matice tuhosti přímou metodou poskytuje názornou představu o hodnotách prvků lokální matice tuhosti K^e . Odvození transformací na referenční element je standardní metoda pro určení lokálních matic tuhosti pro všechny typy konečných prvků.

Vraťme se ke globálnímu značení veličin příslušných daným elementům:

$$\begin{aligned} B(U, v) &= \vec{v}^\top K \vec{U} = \sum_{i,n=1}^M v_i k_{in} U_n \quad (10) \\ &= \sum_{e \in \mathcal{T}} (\vec{v}^e)^\top K^e \vec{U}^e = \sum_{e \in \mathcal{T}} \sum_{r,s=j,k,m} v_r k_{rs}^e U_s \end{aligned}$$

Jestliže některý vrchol, například $\mathbf{q}^{(j)}$, leží na hranici Γ_D , pak $v_j = 0 = U_j$. Z formule (10) plyne, že globální matice tuhosti K typu (M, M) se sestaví z lokálních matic tuhosti takto: Nejprve na místa všech prvků matice K vložíme nuly. Pak postupně procházíme všechny elementy z \mathcal{T} a pro každý element e s vrcholy $\mathbf{q}^{(j)}, \mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{q}^{(m)}$ vypočteme prvky k_{rs}^e , $r, s = j, k, m$ matice K^e a přičteme je k hodnotě prvku matice K s indexy (r, s) , pokud žádný z vrcholů $\mathbf{q}^{(r)}, \mathbf{q}^{(s)}$ neleží na Γ_D , tj. pokud $1 \leq r \leq M$ a $1 \leq s \leq M$. Po projití všech elementů z \mathcal{T} budou hodnoty všech prvků matice K korektní.

3. *Výpočet složek vektoru pravých stran:* Složky vektoru pravých stran \vec{F} se počítají současně s výpočtem prvků matice K kondenzací. Výchozí formuli odvodíme takto:

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} = \sum_{e \in \mathcal{T}} \int_e f v \, d\mathbf{x}$$

Integrál $\int_e f v \, d\mathbf{x}$ vypočteme přibližně pomocí jednoduché kvadraturní formule pro integraci přes trojúhelník e

$$\int_e g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \doteq \frac{1}{3} \text{pl}(T)(g_1 + g_2 + g_3), \quad (11)$$

kde g_1, g_2, g_3 jsou hodnoty funkce $g(\mathbf{x})$ ve vrcholech e . Chyba této numerické integrace řádově nezhorší chybu MKP.

Užijeme-li formule (11) a položíme-li $\text{pl}(e) = |\det J_e|/2$, dostaneme

$$L_h(v) = \frac{1}{6} \sum_{e \in \mathcal{T}} |\det J_e| [v_j, v_k, v_m] \begin{bmatrix} f_j \\ f_k \\ f_m \end{bmatrix}, \quad \text{kde } f_r = f(\mathbf{q}^{(r)}) \text{ pro } r = j, k, m.$$

Zde $L_h(v)$ je přibližná hodnota pravé strany $L(v)$, takže přibližné řešení U není řešením rovnic (3), ale rovnic $B(U, v) = L_h(v)$ pro všechna $v \in V_h$. Příslušný vektor \vec{F} s vlastností $\vec{v}^\top \vec{F} = L_h(v)$ sestavujeme takto: Nejprve vektor \vec{F} obsadíme nulami. Zabýváme-li se v procesu kondenzace elementem e o vrcholech $\mathbf{q}^{(r)}$ pro $r = j, k, m$, přičteme pro $r = j, k, m$ ke složce F_r číslo $|\det J_e| f_r / 6$, pokud $r \in \{1, \dots, M\}$.

Poznámka 1. a) Řešením systému rovnic (5) získáme po částech lineární aproximaci přesného řešení okrajové úlohy (3.4), (3.5) pro $g_0 = 0$, která je určena hodnotami U_1, \dots, U_M v uzlech $\mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(M)}$.

b) Gradient přibližného řešení má na každém elementu $e = \overline{\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(m)}}$ konstantní hodnotu. Dosazením do druhého tvrzení z (9) vznikne

$$\nabla U = (\det J_e)^{-1} \left\{ (U_k - U_j) \begin{bmatrix} q_2^{(m)} - q_2^{(j)} \\ q_1^{(j)} - q_1^{(m)} \end{bmatrix} + (U_m - U_j) \begin{bmatrix} q_2^{(j)} - q_2^{(k)} \\ q_1^{(k)} - q_1^{(j)} \end{bmatrix} \right\}$$

Velmi často je třeba počítat hodnoty gradientu přibližného řešení U v uzlech triangulace. Každý uzel \mathbf{q} je vrcholem několika elementů a na každém je aproximace gradientu obecně jiný konstantní vektor. Rutinně se nejčastěji počítá aproximace gradientu ve vrcholu \mathbf{q} jako aritmetický průměr konstantních aproximací gradientu přesného řešení na všech elementech s vrcholem \mathbf{q} .

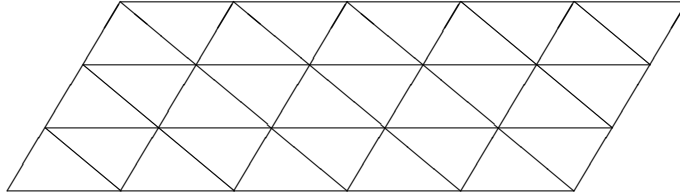
c) Tam, kde jsou druhé parciální derivace hledaného řešení příliš velké, je aproximace po částech lineárními elementy velmi nepřesná, nezvolíme-li zde triangulaci dostatečně jemnou. V posledních letech jsou intenzivně vyvíjeny adaptivní algoritmy, které úlohy (3.4), (3.5) řeší v celé oblasti s chybou, menší, než předem dané malé kladné číslo ε . Po každém přibližném vyřešení úlohy (3.4), (3.5) jsou nalezeny podoblasti, na nichž je lokální chyba větší, než ε . V těchto podoblastech se triangulace zjemní a úloha se řeší znovu. Tento krok se opakuje tak dlouho, až je požadované přesnosti dosaženo na všech elementech triangulace.

d) Přesnost vypočtené aproximace závisí také na tom, zda elementy použité triangulace nemají žádné vnitřní úhly příliš malé.

Otázky a příklady k procvičení

1. Je dán element e s vrcholy $\mathbf{q}^{(1)} = (0; 0)$, $\mathbf{q}^{(2)} = (0; 0,9)$, $\mathbf{q}^{(3)} = (0,3; 0,5)$.
 - a) Určete transformaci referenčního elementu \hat{e} na e , její Jacobiovu matici a plošný obsah elementu e .
 - b) Vypočtete lokální matici tuhosti elementu e pro řešení okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici (3.4) transformací na referenční element i přímým výpočtem.

2. Na rovnoběžníkové oblasti Ω uvažte triangulaci z Obr. 7. Za předpokladu, že Dirichletova podmínka je dána na její levé šikmé a horní vodorovné straně najděte číslování vrcholů, pro něž je šířka pásu příslušné matice tuhosti K a) nejmenší a b) největší. V obou případech matici K schematicky znázorněte a výskyty nenulových prvků v ní vyznačte.



Obrázek 7. Triangulace rovnoběžníkové oblasti

5 Minimizační formulace úlohy (3.4), (3.5)

Vedle Galerkinovy formulace (3.8) je populární i tzv. *minimizační* formulace úlohy (3.4), (3.5). Opět se omezíme na případ $g_0 = 0$: Hledáme funkci u splňující okrajovou podmínku $u = 0$ na Γ_D , která dává minimum funkcionálu

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}B(v, v) - L(v) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 - fv \right] dx$$

na prostoru V , tj.

$$u \in V : \quad \Phi(u) = \min_{v \in V} \Phi(v) \quad (1)$$

Ukážeme, že variační formulace (3.8) a minimizační formulace (1) mají stejné řešení (tedy řešení minimizačního problému splňuje i podmínku $\partial u / \partial \vec{n}|_{\Gamma_N} = 0$). Předpokládejme nejdříve, že u je řešením problému (3.8) s $g_0 = 0$. Zvolme $v \in V$ a položme $w = v - u$, takže $w \in V$ a $v = u + w$. Platí

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= \Phi(u + w) = \frac{1}{2}B(u + w, u + w) - L(u + w) \\ &= \frac{1}{2}B(u, u) - L(u) + B(u, w) - L(w) + \frac{1}{2}B(w, w) \\ &= \Phi(u) + \frac{1}{2}B(w, w) \geq \Phi(u), \end{aligned}$$

neboť $B(u, w) = L(w)$ a $B(w, w) \geq 0$. Tedy u je řešením problému (1). Obráceně předpokládejme, že u je řešením problému (1). Potom pro každé $v \in V$ a každé reálné číslo ε platí

$$\Phi(u) \leq \Phi(u + \varepsilon v)$$

a tedy diferencovatelná funkce

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= \Phi(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2}B(u, u) \\ &+ \varepsilon B(u, v) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 B(v, v) - L(u) - \varepsilon L(v) \end{aligned}$$

má minimum pro $\varepsilon = 0$ a tudíž $g'(0) = 0$. Avšak $g'(0) = B(u, v) - L(v)$ a vidíme, že u je řešením problému (3.8).

Poznámka 2. a) Minimizační formulace je méně obecná, než variační. Existuje jen pro okrajové problémy, v nichž odpovídající funkcionál $B(u, v)$ je V -eliptický (je to jistý druh pozitivní definitnosti) a symetrický, tj. platí $B(u, v) = B(v, u)$ pro všechna $u, v \in V$. Mnohé důležité diferenciální rovnice nevytváří symetrický funkcionál $B(u, v)$. Je-li však $B(u, v)$ V -eliptický, variační formulace existuje. Variační formulace existuje i pro nestacionární úlohy, pro něž minimizační formulace neexistuje.

b) Z minimizační formulace vychází přibližná metoda pro řešení okrajových úloh, tzv. *Ritzova metoda* (Walter Ritz, 1909). Je starší, než metoda Galerkinova a, jak bylo uvedeno, je méně obecná. V případě úlohy (3.4), (3.5) s $g_0 = 0$ spočívá v tom, že se opět zvolí úplná posloupnost báзовých funkcí $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}$ splňujících homogenní Dirichletovu podmínku $\zeta_i = 0$ na Γ_D , přibližné řešení se hledá ve tvaru $u_n = \sum_{i=1}^n c_i \zeta_i$ a koeficienty c_i se určí z podmínky

$$\Phi(u_n) = \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \Phi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \zeta_i \right).$$

Tento Ritzův přístup je možný i v MKP. Je-li $v \in V_h$, je v úloze (3.4), (3.5), $g_0 = 0$

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} \vec{v}^\top K \vec{v} - \vec{v}^\top \vec{F}$$

a úloha najít $\min_{\vec{v} \in \mathbb{R}^M} \left[\frac{1}{2} \vec{v}^\top K \vec{v} - \vec{v}^\top \vec{F} \right]$ znamená řešit rovnice $K\vec{U} = \vec{F}$.

Vzhledem k větší obecnosti se v dalším textu omezíme jen na Galerkinův přístup, stejně jako je tomu v drtivé většině monografií o MKP. V mechanice se variační (Galerkinův) přístup nazývá princip virtuálních posunutí či virtuálních prací, zatímco Ritzův přístup odpovídá principu minima potenciální energie.

6 Obecná stacionární eliptická úloha

Předmětem této kapitoly je aproximace řešení dalekosáhlého zobecnění modelové úlohy (3.8) metodou konečných prvků. Budeme se zabývat řešením okrajové úlohy sestávající z parciální diferenciální rovnice

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla u) + \omega u = f \quad (1)$$

na libovolné regulární oblasti Ω a okrajových podmínek

$$u = g_0 \text{ na } \Gamma_D \text{ a } \lambda \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + \alpha u = g_1 \text{ na } \Gamma_N \quad (2)$$

za předpokladů, že $\Gamma_D \neq \emptyset$,

$$\lambda(\mathbf{x}) \geq \lambda_{\min} > 0, \quad \omega(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ na } \bar{\Omega}, \quad \alpha(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ na } \Gamma_N. \quad (3)$$

Klasická formulace této okrajové úlohy je tedy úlohou najít funkci $u \in C^2(\bar{\Omega})$, která splňuje rovnici (1) a okrajové podmínky a dále $\lambda \in C^1(\bar{\Omega})$, $f, \omega \in C(\bar{\Omega})$ splňují podmínky (3) a $g_0 \in C^2(\Gamma_D)$, $\alpha, g_1 \in C(\Gamma_N)$.

Odvození variační formulace: Uvažme libovolnou testovací funkci v , tj. $v|_{\Gamma_D} = 0$ a $v \in C^1(\bar{\Omega})$, a vynásobme obě strany rovnice (1) funkcí v :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \omega u \right] v d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} v n_1 - \lambda \frac{\partial u}{\partial y} v n_2 \right) ds \\ &\quad + \int_{\Omega} \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \omega u v \right] d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} v ds + \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla v + \omega u v) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma_N} (\alpha u - g_1) v ds + \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla v + \omega u v) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Tato identita je ekvivalentní s rovnicí

$$B(u, v) = L(v) \quad (4)$$

pro

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla v + \omega u v) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \alpha u v ds \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} g_1 v ds \end{aligned}$$

Identita (4) má smysl pro všechny funkce $u, v \in H^1(\Omega)$ a pro všechna $\lambda, \omega \in L_2(\Omega)$, $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ a $\alpha, g_1 \in L_2(\Gamma_N)$. Označíme

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ na } \Gamma_D\} \quad \text{a}$$

$$W = \{w \in H^1(\Omega); w = g_0 \text{ na } \Gamma_D\}.$$

V nazveme *množina testovacích funkcí* a W *množina přípustných řešení*. Pak *variační formulace* je tato úloha:

Najděte přípustné řešení $u \in W$ takové, že

$$B(u, v) = L(v) \text{ pro všechna } v \in V. \quad (5)$$

6.1 Diskretizace variační formulace (5)

Protože Ω je libovolná regulární oblast, nemusí být hranice $\partial\Omega$ polygon. Proto, abychom mohli použít stejného procesu diskretizace jako v kapitole 4, nahradíme hranici $\partial\Omega$ polygonem $\partial\Omega_h$ tak, aby aproximace $\partial\Omega_h$ hranice $\partial\Omega$ byla sjednocením aproximace $\Gamma_{D,h}$ hranice Γ_D a aproximace $\Gamma_{N,h}$ hranice Γ_N . Oblast Ω_h , určenou hranicí $\partial\Omega_h$, potom pokryjeme triangulací \mathcal{T} tak, aby všechny vrcholy trojúhelníků, ležící na hranici $\partial\Omega_h$ ležely současně na hranici $\partial\Omega$ a označíme $g_{0,h}$ po částech lineární interpolant funkce g_0 v uzlech z $\Gamma_{D,h}$.

Označíme Z_h prostor po částech lineárních funkcí na Ω_h a položíme

$$V_h = \{v \in Z_h; v = 0 \text{ na } \Gamma_{D,h}\}$$

$$W_h = \{v \in Z_h; v = g_{0,h} \text{ na } \Gamma_{D,h}\}$$

V diskretizaci variační formulace budeme tedy hledat po částech lineární funkci $U(\mathbf{x})$ ve tvaru $U = \sum_{j=1}^N U_j \varphi_j(\mathbf{x})$, přičemž zachováme význam počtů

N počet všech vrcholů triangulace,

M počet vrcholů triangulace, neležících na uzávěru $\bar{\Gamma}_D$,

R počet trojúhelníků triangulace

z kapitoly 4. Potom podmínka $U \in W_h$ je ekvivalentní s podmínkou $U \in Z_h$ a

$$U_j = g_0(\mathbf{q}^{(j)}) \text{ pro } j = M + 1, \dots, N \quad (6)$$

Nyní budeme diskretizovat funkcionály $B(u, v)$ a $L(v)$. Volit

$$B_h(U, v) = \int_{\Omega_h} \lambda \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Omega_h} \omega U v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{N,h}} \alpha U v ds$$

$$L_h(v) = \int_{\Omega_h} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{N,h}} g_1 v ds$$

nestačí. Integrandy obsahují proměnné koeficienty λ, ω, α a funkce f, g_1 . Aby algoritmus byl skutečně obecný, chápeme všechny integrály přes Ω_h jako součet integrálů přes všechny elementy a integrály přes elementy počítáme přibližně kvadraturní formulí (4.11). Integrály přes $\Gamma_{N,h}$ počítáme jako součet integrálů přes všechny hrany $\Gamma_{N,h}$ přibližně jednoduchou lichoběžníkovou formulí. Počítáme-li tedy $\int_q G ds$

přes stranu $q = \overline{\mathbf{q}^{(j)}\mathbf{q}^{(k)}}$, dostaneme použitím transformace

$$x_1 = x_1(t) = q_1^{(j)} + (q_1^{(k)} - q_1^{(j)})t, \quad x_2 = x_2(t) = q_2^{(j)} + (q_2^{(k)} - q_2^{(j)})t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \int_q G ds &= \int_0^1 G(x_1(t), x_2(t)) \sqrt{x_1'^2(t) + x_2'^2(t)} dt \doteq q_{jk}(G_j + G_k) \\ q_{jk} &= \frac{1}{2} \sqrt{(q_1^{(k)} - q_1^{(j)})^2 + (q_2^{(k)} - q_2^{(j)})^2} \end{aligned}$$

Výsledné funkcionály označíme $B_h(U, v)$ a $L_h(v)$. Užijeme-li značení $I^e(G) = \text{pl}(e)/3(G_j + G_k + G_m)$ a $I^q(G) = q_{jk}(G_j + G_k)$, vznikne

$$\begin{aligned} B_h(U, v) &= \sum_{e \in \mathcal{T}} I^e(\lambda \nabla U \cdot \nabla v + \omega U v) + \sum_{q \in \Gamma_{N,h}} I^q(\alpha U v) \\ L_h(v) &= \sum_{e \in \mathcal{T}} I^e(f v) + \sum_{q \in \Gamma_{N,h}} I^q(g_1 v) \end{aligned}$$

a přibližné řešení U je určeno podmínkou

$$B_h(U, v) = L_h(v) \quad \text{pro všechna } v \in V_h. \quad (7)$$

Abychom vyjádřili (7) v maticovém tvaru, upravme nejdříve $I^e(\lambda \nabla U \cdot \nabla v)$. Uvážíme-li, že ∇U a ∇v jsou na e konstantní, dostaneme $I^e(\lambda \nabla U \cdot \nabla v)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \text{pl}(e) (\nabla U \cdot \nabla v) [\lambda_j + \lambda_k + \lambda_m] \\ &= \lambda^e \text{pl}(e) \nabla U \cdot \nabla v = \lambda^e \int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \lambda^e (\vec{v}^e)^\top K^e \vec{U}^e, \end{aligned}$$

kde $\lambda^e = (\lambda_j + \lambda_k + \lambda_m)/3$ a K^e je matice tuhosti elementu e uvedená v odstavci 4.3. Dále

$$\begin{aligned} I^e(\omega U v) &= \frac{|\det J_e|}{6} \sum_{r=j,k,m} \omega_r v_r U_r \\ &= \frac{|\det J_e|}{6} [v_j, v_k, v_m] \begin{bmatrix} \omega_j & 0 & 0 \\ 0 & \omega_k & 0 \\ 0 & 0 & \omega_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ U_k \\ U_m \end{bmatrix} \\ I^q(\alpha U v) &= q_{jk} \sum_{r=j,k} \alpha_r v_r U_r = q_{jk} [v_j, v_k] \begin{bmatrix} \alpha_j & 0 \\ 0 & \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ U_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Výsledná matice tuhosti K a vektor pravých stran \vec{F} odpovídající funkcionálu $B_h(U, v)$ a pravé straně $L_h(v)$ se sestavují takto: Matice K a vektor \vec{F} se obsadí nulami. Pak postupně procházíme všechny elementy z \mathcal{T} a hrany z $\Gamma_{N,h}$.

Uvažme element e s vrcholy $\mathbf{q}^{(j)}, \mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{q}^{(m)}$. Pro libovolný index $r \in \{j, k, m\}$ postupujeme takto:

1. Jestliže $\mathbf{q}^{(r)} \in \bar{\Gamma}_{D,h}$, neděláme nic.
2. Jestliže $\mathbf{q}^{(r)} \notin \bar{\Gamma}_{D,h}$, pak ke složce F_r vektoru \vec{F} přičteme $|\det J_e|f_r/6$ a pro indexy $s = j, k, m$ postupujeme takto:
 - 2.1. Jestliže $\mathbf{q}^{(s)} \in \bar{\Gamma}_{D,h}$, pak $U_s = g_0(\mathbf{q}^{(s)})$ dle formulace (6) a tedy

$$\lambda^e k_{rs}^e v_r U_s = \lambda^e k_{rs}^e v_r g_0(\mathbf{q}^{(s)}).$$

Prvek $\lambda^e k_{rs}^e g_0(\mathbf{q}^{(s)})$ nepatří do matice K , ale odečte se od složky F_r vektoru \vec{F} . (Tato situace nevznikala v problému (3.8), neboť tam $g_0 = 0$ na Γ_D .)

2.2. Jestliže $\mathbf{q}^{(s)} \notin \bar{\Gamma}_{D,h}$, pak k prvku K_{rs} přičteme $\lambda^e k_{rs}^e$ a v případě, že $s = r$ přičteme ke K_{rr} ještě číslo $|\det J_e|\omega_r/6$.

Uvažme hranu q s vrcholy $\mathbf{q}^{(j)}, \mathbf{q}^{(k)}$: Jestliže $\mathbf{q}^{(j)} \notin \bar{\Gamma}_{D,h}$, pak číslo $q_{jk}\alpha_j$ přičteme ke K_{jj} a podobně pro $\mathbf{q}^{(k)} \notin \bar{\Gamma}_{D,h}$ přičteme $q_{jk}\alpha_k$ ke K_{kk} . Jestliže $q \subseteq \Gamma_{N,h}$, pak číslo $q_{jk}g_{1j}$ přičteme k F_j když $j \leq M$ a $q_{jk}g_{1k}$ přičteme k F_k když $k \leq M$.

Pro takto sestavenou matici K a vektor \vec{F} opět platí identita $\vec{v}^\top K \vec{U} = \vec{v}^\top \vec{F}$ pro všechna $\vec{v} \in \mathbb{R}^M$ právě tehdy, když $K \vec{U} = \vec{F}$. Matice K je opět symetrická a na základě předpokladu (3) se snadno vidí, že

$$\vec{v}^\top K \vec{v} \geq \lambda_{\min} \int_{\Omega_h} \|\nabla v\|^2 dx.$$

Tedy matice K je pozitivně definitní.

7 Nestacionární úloha vedení tepla

Nyní se budeme zabývat přibližným řešením nestacionárního (časově závislého) zobecnění úlohy (6.1) - (6.3). Předpokládáme tedy, že neznámá funkce u a daná funkce f závisí nejen na prostorových proměnných $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, ale i na času t . Budeme opět uvažovat okrajové podmínky (6.2) a materiálové podmínky (6.3). V tomto případě je však podmínky (6.2), (6.3) nutno doplnit o tzv. počáteční podmínku, určující hodnoty hledané funkce u na začátku procesu. Jestliže proces probíhá v časovém intervalu $(0, T)$, vznikne tato *nestacionární úloha vedení tepla*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) + \omega u = f \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T) \quad (1)$$

s okrajovými podmínkami

$$u = g_0 \text{ na } \Gamma_D \text{ a } \lambda \frac{\partial u}{\partial \bar{\mathbf{n}}} + \alpha u = g_1 \text{ na } \Gamma_N \text{ pro všechna } t \in (0, T) \quad (2)$$

a s počáteční podmínkou

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^{(0)}(\mathbf{x}) \text{ pro všechna } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

Dále předpokládáme platnost *materiálových podmínek* (6.3).

Variační formulace: Pro každé $t \in (0, T)$ vynásobíme obě strany (1) testovací funkcí $v \in V$, kde

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ na } \Gamma_D\} \text{ a } W = \{w \in H^1(\Omega); w = g_0 \text{ na } \Gamma_D\},$$

integrujeme přes Ω a uijeme Greenovy formule. Označíme-li skalární součin

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \text{ pro } f, g \in L_2(\Omega),$$

vznikne úloha najít funkci $u(\mathbf{x}, t)$ takovou, že v každém čase $t \in (0, T)$

$$u = u(\mathbf{x}, t) \in W, \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle + B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (4)$$

$$\text{a } u(\mathbf{x}, 0) = u^{(0)}(\mathbf{x}) \text{ v } \bar{\Omega}.$$

Zde jsou $B(u, v)$ a $L(v)$ pro každé $t \in (0, T)$ definována jako v (6.4).

Diskretizace v prostoru: Úlohu (4) budeme diskretizovat v prostorových souřadnicích stejně jako ve stacionárním případě. Nyní jsou však hodnoty přibližného řešení $U \in W_h$ v uzlech $\mathbf{q}^{(j)} \in \bar{\Omega}_h - \bar{\Gamma}_D$ závislé na čase, tj. $U_j = U_j(t)$ pro všechna $t \in (0, T)$. To nic nemění na tom, že funkcionály $B(u, v)$ a $L(v)$ budeme aproximovat výrazy $B_h(U, v)$ a $L_h(v)$, uvedenými v (6.7). V (4) je však navíc člen $\langle \partial u / \partial t, v \rangle$. Ten budeme aproximovat výrazem

$$\int_{\Omega_h} \frac{\partial U}{\partial t} v d\mathbf{x} = \sum_{e \in \mathcal{T}} \int_e \frac{\partial U}{\partial t} v d\mathbf{x}.$$

Tyto integrály bychom mohli počítat přesně, ale i zde uijeme numerické integrace. Přitom se přesnost nezmenší a tzv. *matice hmotnosti* bude velmi jednoduchá, totiž diagonální. Protože

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{j=1}^M \dot{U}_j(t) \varphi_j(\mathbf{x}),$$

tečka nad U značí derivaci dle času t , dostaneme pro element $e = \overline{\mathbf{q}^{(j)}\mathbf{q}^{(k)}\mathbf{q}^{(m)}}$

$$I^e \left(\frac{\partial U}{\partial t} v \right) = \frac{1}{6} |\det J_e| \sum_{r=j,k,m} v_r \dot{U}_r.$$

Konečným výsledkem tedy bude

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, v \right\rangle_h = \sum_{e \in \mathcal{T}} I^e \left(\frac{\partial U}{\partial t} v \right) = \vec{v}^\top H \dot{U}, \quad \dot{U} = [\dot{U}_1, \dots, \dot{U}_M]^\top.$$

Diagonální matice hmotnosti H vznikne takto: Diagonálu $[h_1, \dots, h_M]^\top$ matice H obsadíme nulami a pak procházíme všechny elementy. Příspěvek elementu e vznikne tak, že přičteme $|\det J_e|/6$ k prvku h_r pro každý vrchol $\mathbf{q}^{(r)}$ elementu e , který neleží na $\Gamma_{D,h}$. Je zřejmé, že výsledná matice H má v hlavní diagonále vesměs kladné prvky. Výsledkem tohoto procesu kondenzace je lineární soustava

$$H \dot{U} + K \vec{U} = \vec{F}(t) \quad (5)$$

M ODR 1. řádu pro neznámé funkce $U_1(t), \dots, U_M(t)$. Počáteční podmínky získáme diskretizací podmínky $u(\mathbf{x}, 0) = u^{(0)}(\mathbf{x})$ jednoduše tak, že položíme

$$\vec{U}(0) = \vec{U}^{(0)}, \quad (6)$$

kde $U_j^{(0)} = u^{(0)}(\mathbf{q}^{(j)})$ pro $j = 1, \dots, M$.

Rovnice (5), (6) tvoří počáteční úlohu pro soustavu ODR 1. řádu, která splňuje Lipschitzovu podmínku a je tedy jednoznačně řešitelná. Tento problém lze řešit pouze numericky. Standardně se používají metody Eulerova, implicitní Eulerova a Crank-Nicolsonova. Interval $(0, T)$ rozdělíme uzly $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_P = T$, položíme $\delta t_n = t_n - t_{n-1}$ pro $n = 1, \dots, P$ a místo vektoru $\vec{U}(t)$ funkcí $U_1(t), \dots, U_M(t)$ hledáme soustavu vektorů $\vec{U}^{(n)} \doteq \vec{U}(t_n) = [U_1(t_n), \dots, U_M(t_n)]^\top$ pro $n = 0, \dots, P$. Samozřejmě, že vektor $\vec{U}^{(0)}$ je dán počáteční podmínkou (6) a vektory $\vec{U}^{(1)}, \dots, \vec{U}^{(P)}$ vypočítáme jednou z níže uvedených numerických metod a) - c):

a) Eulerova metoda:

$$H \left(\vec{U}^{(n)} - \vec{U}^{(n-1)} \right) / \delta t_n + K \vec{U}^{(n-1)} = \vec{F}^{(n-1)} \quad \text{pro } n = 1, \dots, P.$$

Uvědomíme-li si, že matice inverzní k diagonální matici H je $H^{-1} = \text{diag}(h_1^{-1}, \dots, h_M^{-1})$, pak tato explicitní metoda počítá vektor hodnot

$$\vec{U}^{(n)} = \vec{U}^{(n-1)} + \delta t_n H^{-1} K \vec{U}^{(n-1)} + \delta t_n H^{-1} \vec{F}^{(n-1)}.$$

b) Implicitní Eulerova metoda:

$$H \left(\vec{U}^{(n)} - \vec{U}^{(n-1)} \right) / \delta t_n + K \vec{U}^{(n)} = \vec{F}^{(n)} \quad \text{pro } n = 1, \dots, P,$$

takže výpočet vektoru přibližných hodnot $\vec{U}^{(n)}$ spočívá v řešení systému lineárních rovnic

$$(H + \delta t_n K) \vec{U}^{(n)} = H \vec{U}^{(n-1)} + \delta t_n \vec{F}^{(n)}.$$

Matice soustavy $H + \delta t_n K$ je symetrická pozitivně definitní.

c) Crank-Nicolsonovo schema:

$$H \left(\vec{U}^{(n)} - \vec{U}^{(n-1)} \right) / \delta t_n + \frac{1}{2} K \left(\vec{U}^{(n-1)} + \vec{U}^{(n)} \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}^{(n-1)} + \vec{F}^{(n)} \right)$$

pro $n = 1, \dots, P$, takže výpočet vektoru přibližných hodnot $\vec{U}^{(n)}$ spočívá v řešení systému lineárních rovnic

$$\left(H + \frac{\delta t_n}{2} K \right) \vec{U}^{(n)} = \left(H - \frac{\delta t_n}{2} K \right) \vec{U}^{(n-1)} + \frac{\delta t_n}{2} \left(\vec{F}^{(n-1)} + \vec{F}^{(n)} \right).$$

Zde je opět matice soustavy $H + \delta t_n / 2 K$ symetrická pozitivně definitní. Víme, že Crank-Nicolsonova metoda je řádu 2, zatímco metody a) a b) jsou řádu 1, tj. podstatně méně přesné. Metoda a) má výhodu v tom, že při výpočtu vektoru $\vec{U}^{(n)}$ se neřeší systém rovnic. Je však konvergentní jen za předpokladu, že $\delta t_n \leq 2/\mu$, kde μ je maximální vlastní číslo matice $H^{-1/2} K H^{-1/2}$. Tato podmínka je zpravidla splněna jen pro velmi malé kroky δt_n . Navíc nalezení čísla μ je velmi složité. Proto se Eulerova metoda v této situaci prakticky nepoužívá.

Používají se tedy metoda b) a podstatně přesnější metoda c). Velmi často jsou počáteční podmínky (v čase $t = 0$) v rozporu s okrajovými podmínkami případně jsou v rozporu s tím, jak vypadá řešení dané PDR. Pak je derivace $\partial u / \partial t$ velká a v takových situacích je výhodné používat malých časových kroků δt_n a implicitní Eulerovy metody, která je stabilnější, než Crank-Nicolsonovo schema. Tedy na začátku procesu se volí časové kroky malé a metoda b), postupně se časové kroky zvětšují a v jistém okamžiku se přejde na metodu c).

8 Nestacionární úloha konvekce-difúze

Seznámíme se s metodou pro aproximaci řešení nestacionární rovinné úlohy konvekce-difúze pro nestlačitelné proudění, využívající kombinace metody charakteristik s MKP. Jde o úlohu

$$\partial u / \partial t - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) + \vec{v} \cdot \nabla u = f \quad \text{v } \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma_D} = g_0, \quad (\lambda \partial u / \partial \vec{n} + \alpha u)|_{\Gamma_N} = g_1 \quad \text{pro } t \in (0, T) \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}) \quad \text{v } \bar{\Omega} \quad (3)$$

Předpoklady:

- a) Oblast Ω je regulární, části Γ_D, Γ_N hranice $\partial\Omega$ se v čase nemění a v každém okamžiku $t \in \langle 0, T \rangle$ leží všechny body hranice $\partial\Omega$, jimiž látka vtéká do Ω , v Γ_D .
- b) Funkce f i složky v_1, v_2 vektorové funkce \vec{v} leží v $C(\bar{\Omega})$ a $g_0 \in C(\bar{\Gamma}_D), \alpha, g_1 \in C(\bar{\Gamma}_N)$ pro všechna $t \in \langle 0, T \rangle$ a $\alpha = \alpha(\mathbf{x}) \geq 0$ a $\lambda = \lambda(\mathbf{x}) \geq \lambda_{min} > 0$.

V této klasické formulaci jsou použity standardní *Eulerovy souřadnice* v tom smyslu, že prostorové souřadnice x_1, x_2 a časová souřadnice t jsou vzájemně nezávislé. Formulaci úlohy zjednodušíme obratem, typickým pro *metodu charakteristik*, využívajícím *Lagrangeových souřadnic*: Prostorové souřadnice $x_1(t), x_2(t)$ bodu $\mathbf{x}(t)$ udávají polohu v čase t té částice látky proudící rychlostí \vec{v} , která se v daném čase t_0 nachází v daném bodě $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. Tedy souřadnice $x_1(t), x_2(t)$ jsou řešením počáteční úlohy

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= v_1(\mathbf{x}(t)), & x_1(t_0) &= x_1^{(0)} \\ x_2'(t) &= v_2(\mathbf{x}(t)), & x_2(t_0) &= x_2^{(0)} \end{aligned} \quad (4)$$

Tyto Lagrangeovy souřadnice je místo $\mathbf{x}(t)$ přesněji označovat $X(\mathbf{x}^{(0)}, t_0; t)$. Užitím těchto souřadnic obdržíme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u = \frac{\partial u(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial u(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_1} x_1'(t) + \frac{\partial u(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_2} x_2'(t) = \frac{du(\mathbf{x}(t), t)}{dt}$$

a tedy rovnice (1) nabude tvaru

$$\frac{du(\mathbf{x}(t), t)}{dt} - \operatorname{div}(\lambda \nabla u(\mathbf{x}(t), t)) = f(\mathbf{x}(t), t) \quad (5)$$

Odvození variační formulace: Pro $v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\Gamma_D} = 0$ plyne z (5) a (2) užitím Greenových formulí pro všechna $t \in (0, T)$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] v d\mathbf{x} &= \langle f, v \rangle \\ \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle - \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v ds + \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} &= \langle f, v \rangle \\ \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + \int_{\Gamma_N} (\alpha u - g_1) v ds + \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} &= \langle f, v \rangle. \end{aligned}$$

Položíme-li $V = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_D} = 0\}$ a

$$W = \{w(\mathbf{x}(t), t); w \in H^1(\Omega), w|_{\Gamma_D} = g_0 \forall t \in (0, T)\},$$

pak *variační formulace* zní: Najděte $u \in W$ tak, aby $u(\mathbf{x}, 0) = u^{(0)}(\mathbf{x})$ v $\bar{\Omega}$ a

$$\left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \text{ a } \forall t \in (0, T). \quad (6)$$

Zde

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \alpha u v ds \quad \text{a}$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} g_1 v ds$$

jsou funkcemi proměnné $t \in (0, T)$.

Časová diskretizace: Za účelem časové diskretizace zvolíme celé kladné číslo P a časový krok $\delta t = T/P$. Pak označíme $t_i = i\delta t$ a $G^{(i)}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, t_i)$ pro každou funkci $G = G(\mathbf{x}, t)$ a pro $i = 0, \dots, P$. Pro časovou diskretizaci uijeme *implicitní Eulerovy metody*: Protože funkce $u^{(0)}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, 0)$ je dána počáteční podmínkou (3), funkci $u^{(i+1)}(\mathbf{x})$ aproximujeme postupně pro $i = 0, \dots, P-1$ přibližným řešením okrajové úlohy

$$\left\langle \frac{u^{(i+1)}(\mathbf{x}) - u^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{x}))}{\delta t}, v \right\rangle + B(u^{(i+1)}, v) = L(v)$$

pro $t = t_{i+1}$ a pro $X^{(i)}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{x}, t_{i+1}; t_i)$. Tato úloha je ekvivalentní s úlohou

$$\frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} u^{(i+1)} v d\mathbf{x} + B(u^{(i+1)}, v) = L(v) + \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} u^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{x})) v d\mathbf{x} \quad (7)$$

pro $t = t_{i+1}$.

Prostorová diskretizace: Stejně jako v odstavci 6.1 nahradíme hranici $\partial\Omega$ regulární oblasti Ω polygonem $\partial\Omega_h$, ohraničujícím polygonální oblast Ω_h , kterou pokryjeme triangulací \mathcal{T} a postupně pro $i = 0, \dots, P-1$ nahradíme úlohu (7) *diskrétní úlohou*: Položíme

$$\vec{U}^{(0)} = \left[u^{(0)}(\mathbf{q}^{(1)}), \dots, u^{(0)}(\mathbf{q}^{(M)}) \right]^\top$$

a postupně pro $i = 0, \dots, P-1$ určíme vektor $\vec{U}^{(i+1)}$ řešením systému rovnic

$$K \vec{U}^{(i+1)} = \vec{F}^{(i+1)},$$

kde matice tuhosti K a vektor zatížení $\vec{F}^{(i+1)}$ vzniknou procesem kondenzace z této *diskretizace* úlohy (7):

$$\sum_{e \in \mathcal{T}} I^e \left(\frac{1}{\delta t} U^{(i+1)} v + \lambda \nabla U^{(i+1)} \cdot \nabla v \right) + \sum_{q \in \Gamma_{N,h}} I^q (\alpha U^{(i+1)} v) =$$

$$= \sum_{e \in \mathcal{T}} I^e \left(f^{(i+1)} v + \frac{1}{\delta t} U^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{x})) v \right) + \sum_{q \in \Gamma_{N,h}} I^q (g_1 v).$$

Poznámka. Jestliže $\mathbf{x} \in e = \overline{\mathbf{q}^{(j)}\mathbf{q}^{(k)}\mathbf{q}^{(m)}}$, pak

$$I^e(U^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{x}))v) = \frac{\text{pl}(e)}{3}[v_j, v_k, v_m] \begin{bmatrix} U^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{q}^{(j)})) \\ U^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{q}^{(k)})) \\ U^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{q}^{(m)})) \end{bmatrix}$$

a pro $r = j, k, m$, $\mathbf{q}^{(r)} = (q_1^{(r)}, q_2^{(r)})$ je $X^{(i)}(\mathbf{q}^{(r)}) = X(\mathbf{q}^{(r)}, t_{i+1}; t_i)$ bod $(x_1(t_i), x_2(t_i))$ hodnot řešení $x_1(t), x_2(t)$ počáteční úlohy

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= v_1(x_1(t), x_2(t)) & \text{pro } t \in (t_i, t_{i+1}), & \quad x_1(t_{i+1}) = q_1^{(r)} \\ x_2'(t) &= v_2(x_1(t), x_2(t)) & & \quad x_2(t_{i+1}) = q_2^{(r)}. \end{aligned} \quad (8)$$

9 Další typy konečných elementů

V kapitolách 4, 6, 7 a 8 jsme pracovali s *lineárními Lagrangeovými trojúhelníkovými elementy* e ,

- přiřazenými danému *trojúhelníku* $e = \overline{\mathbf{q}^{(1)}\mathbf{q}^{(2)}\mathbf{q}^{(3)}}$
- s *lokálním prostorem* zúžení lineárních polynomů $p(\mathbf{x}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ na e a
- s parametry (*stupni volnosti*) $p_1 = p(\mathbf{q}^{(1)})$, $p_2 = p(\mathbf{q}^{(2)})$, $p_3 = p(\mathbf{q}^{(3)})$, které jednoznačně určují polynom p z lokálního prostoru.

Přirozeným "rozšířením" jsou *kvadratické Lagrangeovy trojúhelníkové elementy* e , určené

- trojúhelníkem $e = \overline{\mathbf{q}^{(1)}\mathbf{q}^{(2)}\mathbf{q}^{(3)}}$,
- *lokálním prostorem* zúžení kvadratických polynomů $p(\mathbf{x}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2$ na e a
- parametry (*stupně volnosti*) $p_i = p(\mathbf{q}^{(i)})$ pro $i = 1, \dots, 6$, kde $\mathbf{q}^{(4)}, \mathbf{q}^{(5)}, \mathbf{q}^{(6)}$ jsou postupně středy stran $\overline{\mathbf{q}^{(1)}\mathbf{q}^{(2)}}$, $\overline{\mathbf{q}^{(2)}\mathbf{q}^{(3)}}$ a $\overline{\mathbf{q}^{(3)}\mathbf{q}^{(1)}}$.

Ukážeme, že šesti hodnotami p_1, \dots, p_6 v uzlech $\mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(6)}$ je kvadratický polynom určen jednoznačně. Protože transformací (4.6):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi, \eta) = q_1^{(1)} + \left(q_1^{(2)} - q_1^{(1)} \right) \xi + \left(q_1^{(3)} - q_1^{(1)} \right) \eta \\ x_2 &= x_2(\xi, \eta) = q_2^{(1)} + \left(q_2^{(2)} - q_2^{(1)} \right) \xi + \left(q_2^{(3)} - q_2^{(1)} \right) \eta \end{aligned}$$

přejde kvadratický polynom proměnných x_1, x_2 na kvadratický polynom proměnných ξ, η a naopak, stačí toto tvrzení dokázat pro referenční element \hat{e} v rovině ξ, η .

Uzly $\hat{\mathbf{q}}^{(1)} = (0, 0)$, $\hat{\mathbf{q}}^{(2)} = (1, 0)$, $\hat{\mathbf{q}}^{(3)} = (0, 1)$, $\hat{\mathbf{q}}^{(4)} = (1/2, 0)$, $\hat{\mathbf{q}}^{(5)} = (1/2, 0)$ a $\hat{\mathbf{q}}^{(6)} = (0, 1/2)$ jednotkového trojúhelníka a polynomy

$$\begin{aligned}\hat{N}_1^{(2)} &= (1 - 2\xi - 2\eta)(1 - \xi - \eta) \\ \hat{N}_2^{(2)} &= (2\xi - 1)\xi \\ \hat{N}_3^{(2)} &= (2\eta - 1)\eta \\ \hat{N}_4^{(2)} &= 4(1 - \xi - \eta)\xi \\ \hat{N}_5^{(2)} &= 4\xi\eta \\ \hat{N}_6^{(2)} &= 4(1 - \xi - \eta)\eta\end{aligned}$$

mají tuto vlastnost: $\hat{N}_j^{(2)}(\hat{\mathbf{q}}^{(j)}) = 1$ a $\hat{N}_j^{(2)}(\hat{\mathbf{q}}^{(i)}) = 0$ pro všechna $i \neq j$, $j, i = 1, \dots, 6$. Potom polynom

$$\hat{p}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 p_j \hat{N}_j^{(2)}(\xi, \eta) \quad (9)$$

je evidentně kvadratický a $\hat{p}(\hat{\mathbf{q}}^{(j)}) = p_j$ pro $j = 1, \dots, 6$.

Obráceně ukážeme, že každý kvadratický polynom $\hat{q}(\xi, \eta)$ s vlastností $\hat{q}(\hat{\mathbf{q}}^{(j)}) = p_j$ je roven polynomu \hat{p} : Polynom $\hat{\omega} = \hat{p} - \hat{q}$ je kvadratický a je rovný nule v bodech $\mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(6)}$. Označme

$$\hat{\omega} = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi^2 + a_4\xi\eta + a_5\eta^2.$$

Jelikož $\hat{\omega}(\xi, 0) = a_0 + a_1\xi + a_3\xi^2 = 0$ pro $\xi = 0, 1/2, 1$, je nutně $a_0 = a_1 = a_3 = 0$. Podobně polynom $\hat{\omega}(0, \eta) = a_2\eta + a_5\eta^2$ je roven nule pro $\eta = 0, 1/2, 1$ a tedy $a_2 = a_5 = 0$. Konečně z identity $\hat{\omega}(1/2, 1/2) = a_4/4 = 0$ plyne $a_4 = 0$. Tedy polynomy \hat{p} a \hat{q} jsou totožné.

Ověříme ještě, že pro dva elementy \mathbf{e} a $\bar{\mathbf{e}}$ se společnou stranou q a pro libovolné kvadratické polynomy p a \bar{p} , určené hodnotami v uzlech elementu \mathbf{e} a $\bar{\mathbf{e}}$ platí $p = \bar{p}$ na q , takže funkce $v(\mathbf{x})$, definovaná na $e \cup \bar{e}$ předpisem $v = p$ na e a $v = \bar{p}$ na \bar{e} je spojitá na $e \cup \bar{e}$: Rozdíl $p - \bar{p}$ je na straně q kvadratický polynom jedné proměnné, který je roven nule ve třech bodech. Potom však $p - \bar{p} = 0$ a tedy $p = \bar{p}$ na q .

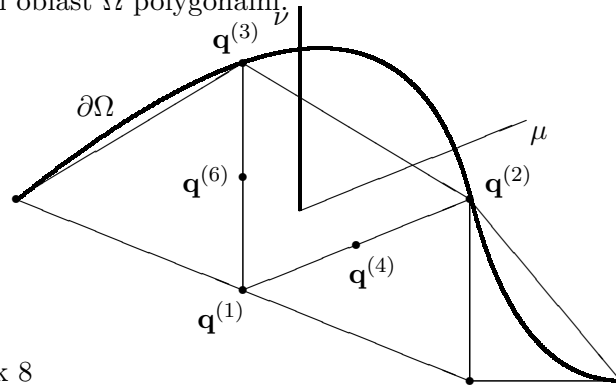
Předpokládejme, že hranice $\partial\Omega$ regulární oblasti Ω je polygon a zvolme na Ω triangulaci \mathcal{T} . Každý element bude nyní mít 6 uzlů. Jako v odstavci 4.1 označíme Z_h prostor *po částech kvadratických funkcí*, tj. prostor funkcí, spojitých na Ω , které jsou kvadratickými polynomy na každém trojúhelníku z \mathcal{T} . Dále označíme $V_h = \{v \in Z_h; v = 0 \text{ na } \bar{\Gamma}_D\}$ prostor testovacích funkcí a $W_h = \{w \in Z_h; w = g_{0,h} \text{ na } \bar{\Gamma}_D\}$, má-li Dirichletova podmínka tvar $u = g_0$ na $\bar{\Gamma}_D$. První parciální derivace funkcí z prostoru Z_h jsou spojitě na každém elementu (jsou to lineární polynomy), ale nejsou spojitě globálně.

Při použití kvadratických elementů pro řešení úlohy (6.1) - (6.3) postupujeme stejně jako při popsaném použití lineárních elementů. Jediný rozdíl je v tom, že místo numerické integrační formule (4.11) musíme pro integraci přes trojúhelníky použít přesnější formule

$$\int_T g \, d\mathbf{x} \doteq \frac{1}{3} \text{pl}(T) [g_4 + g_5 + g_6], \quad (10)$$

kde g_4, g_5, g_6 jsou hodnoty integrandu $g(\mathbf{x})$ ve středech stran trojúhelníka T .

K výpočtu křivkových integrálů přes strany hranice $\partial\Omega_h$ užitíme jednoduchého Simpsonova pravidla. Matice tuhosti K je opět řídká a pozitivně definitní. Při řešení nestacionární úlohy (7.1) - (7.3) není matice hmotnosti M diagonální, ale je řídká a pozitivně definitní. Použití kvadratických elementů vede na řádově přesnější aproximaci řešení, je-li oblast Ω polygonální.



Obrázek 8

Pro obecnou regulární oblast Ω znehodnocuje chyba aproximace hranice $\partial\Omega$ polygonem $\partial\Omega_h$ vysoký řád chyby aproximace po částech kvadratickou funkcí. Viz Obr. 8. Řešením je aproximace oblouku hranice $\partial\Omega$ mezi body $\mathbf{q}^{(2)}$ a $\mathbf{q}^{(3)}$ z Obr. 8 stranou "křivočarého trojúhelníka", který je obrazem strany $\hat{\mathbf{q}}^{(2)}\hat{\mathbf{q}}^{(3)}$ při transformaci

$$x_1 = x_1(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 q_1^{(j)} \hat{N}_j^{(2)}, \quad x_2 = x_2(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 q_2^{(j)} \hat{N}_j^{(2)}, \quad (11)$$

kde $\mathbf{q}^{(4)}, \mathbf{q}^{(6)}$ jsou středy úseček $\overline{\hat{\mathbf{q}}^{(1)}\hat{\mathbf{q}}^{(2)}}$, $\overline{\hat{\mathbf{q}}^{(3)}\hat{\mathbf{q}}^{(1)}}$ a $\mathbf{q}^{(5)}$ volíme tak, aby oblouk

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi, 1 - \xi) = q_1^{(2)} \hat{N}_2^{(2)}(\xi, 1 - \xi) + q_1^{(5)} \hat{N}_5^{(2)}(\xi, 1 - \xi) + q_1^{(3)} \hat{N}_3^{(2)}(\xi, 1 - \xi) \\ x_2 &= x_2(\xi, 1 - \xi) = q_2^{(2)} \hat{N}_2^{(2)}(\xi, 1 - \xi) + q_2^{(5)} \hat{N}_5^{(2)}(\xi, 1 - \xi) + q_2^{(3)} \hat{N}_3^{(2)}(\xi, 1 - \xi) \end{aligned},$$

$0 \leq \xi \leq 1$, procházející body $\mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{q}^{(5)}, \mathbf{q}^{(3)}$ byl dobrou aproximací oblouku $\partial\Omega$ mezi $\mathbf{q}^{(2)}$ a $\mathbf{q}^{(3)}$. Nutnou podmínkou pro použitelnost tohoto "izoparametrického kvadratického elementu" je, aby Jacobián uvedené transformace byl různý od nuly. Ta je splněna vždy, když vrchol $\mathbf{q}^{(5)}$ leží mezi polopřímkami μ a ν z Obr. 8. Při vhodné volbě polohy bodu $\mathbf{q}^{(5)}$ na, případně blízko hranice $\partial\Omega$ umožňuje tato

technika dosáhnout řádově stejně přesné aproximace řešení jako užití kvadratických elementů na polygonální oblasti.

Testovací funkce jsou na izoparametrickém elementu definovány stejně, jako na elementu trojúhelníkovém:

$$v(\mathbf{x}) = \hat{v}(\xi(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x})), \quad \hat{v}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 v_j N_j^{(2)}(\xi, \eta) \quad (12)$$

Tento typ konečného prvku se nazývá *Lagrangeův kvadratický isoparametrický element*. Poznamenejme, že zde jsou tvarové funkce jisté obecně iracionální funkce, jejichž explicitní popis není znám. Nejsme totiž schopni vyjádřit funkce $\xi(\mathbf{x})$ a $\eta(\mathbf{x})$ formulí. To však není třeba, protože všechny výpočty se provádí na referenčním elementu \hat{e} . Pro výpočty integrálů se užívá formule (10) a pro křivkové integrály jednoduchá Simpsonova formule.

V dimenzi 2 je užití lineárních a křivých isoparametrických elementů postačující. Existují i čtyřúhelníkové isoparametrické elementy, které jsou stejně dobře použitelné v dimenzi 2 a navíc mají velmi užitečné rozšíření do dimenze 3, na rozdíl od elementů trojúhelníkových.