Deskriptivní geometrie, I. ročník distančního studia FAST

Řez rotační plochy rovinou

Zadání:

Rotační plocha má osu o rotace kolmou k π a je určena hlavním meridiánem. Rovina řezu je určena stopami $\pi(145, 142, 109)$, vše v mm.

Poznámka k praktickému sestrojení hlavního meridiánu - podle obr. postupujte takto: počátek je v průsečíku osy o rotace s osou x. Nalevo a napravo od počátku vyneste 35 a označte jako Ω. Na osu o naneste 10, pak navažte 20, dále navažte 50 a ještě 20. Bod Ω napojte na koncový bod úsečky 10, vznikne vám přímka, na kterou nyní budete vynášet v šikmém směru poloměr 30 a označíte zase Ω. Šikmá přímka prochází oběma body $\Omega\Omega$. Do tohoto nového $\Omega\Omega$ zabodnete kružítko o poloměru 25 a začnete kroužit od šikmé přímky $\Omega\Omega$ a jejího bodu, označme J k ose x (konáte dvakrát, symetricky na obou stranách). Dále první Ω (na ose x) spojíte s horním koncovým bodem úsečky 20 a prodloužíte šikmo nahoru, označte g. Nyní kružítko zabodnete (tentokráte) do Ω na ose x a *„posbíráte“* délky na šikmé přímce $\Omega\Omega$ až po bod J. Tímto poloměrem vytáčíte nahoru po novou šikmou přímku g, koncový bod označte K. Nyní si vytáhnete hladinu hrdla (její výška je součtem: $10 + 20 + 50$). Přímku g prodloužíte do této hladiny (už mimo hlavní meridián plochy) a označíte potřetí Ω. Připravíte si poslední hladinu ve výši 20 nad hrdlem. Zabodnete kružítko do třetího Ω, poloměr ΩK, takže poslední oblouček bude navazovat (ale s obrácenou křivostí) na dosavadní tvar meridiánu. Vytáčíte nahoru do poslední hladiny, vytvoříte tak omezení kruhové hrany poslední horní kružnice.

Postup:

Konstrukce bodů X, Y křivky řezu (hlavní úloha o této ploše, obr.2) :

Asi ve výši 50 zavedete vodorovnou hladinu, která protne rotační plochu v rovnoběžkové kružnici někdy stručně nazýváme rovnoběžka, pokud nemůže dojít k omylu). Hladina protne také rovinu ρ řezu v hlavní přímce I. osnovy ${}^{I}h^{\rho}$ (rovnoběžné s půdorysnou). Poloměr rovnoběžkové kružnice čteme v nárysu v této hladině od osy o rotace po průsečík hladiny s hlavním meridiánem plochy. Tento poloměr kružítkem přeneseme do půdorysu, zabodneme do osy o_1 a narýsujeme kružnici. Nyní v náryse na hlavní přímce I. osnovy vyhledáme její průsečík s nárysnou stopou roviny řezu, bude to nárysný stopník N_2^h. Tento ordinálou převedeme do osy x, získáme tak jeho půdorys N_1^h. Tímto půdorysem vedeme půdorys hlavním přímky ${}^{I}h_1^{\rho}$, rovnoběžně s půdorysnou stopou p_1^{ρ} roviny řezu. Tam, kde se protíná v půdoryse rovnoběžková kružnice s hlavní přímkou roviny řezu - je bod X_1 a Y_1 čáry řezu. *(Protože průběh hlavní přímky lze odhadnout, není nutné celou kružnici a celou hlavní přímku rýsovat, stačí je kreslit jen v těch místech, kde očekáváme průsečík - to proto, aby se celý obrázek zbytečně, předčasně nezaplnil množstvím čar a byl aspoň trochu*

čitelný). Nyní ordinálami, vedenými v průsečících X_1 a Y_1, odvodíme v nárysu v příslušné hladině také body X_2 a Y_2.
Rozsah dosavadní konstrukce odpovídá středoškolské úrovni a na VŠ technické slabé úrovni se známkou 3.
Od projektanta se bude očekávat doplnění ještě o další, upřesňující konstrukce:

- tečna čáry řezu,
- bod změny viditelnosti (tzv. obrysový bod) vzhledem k nárysně,
- a zvlášť vzhledem k půdorysně,
- nejvyšší bod M a nejnižší bod N čáry řezu.

Tečná rovina τ rotační plochy (jejíž dotykový bod je právě bod X a Y čáry řezu), obr.3 :

Začneme v půdoryse spádovou přímkou (I. osnovy) tečné roviny. Dá se zdůvodnit, že jestliže ji vedeme právě bodem X_1 (není důležité, že bodem X_1 a nikoli Y_1), musí její 1. průmět s_1^τ protínat i osu rotace o_1. V prostoru je tato spádová přímka tečnou s dotykovým bodem X právě toho meridiánu, který prochází bodem X. *(Je dobře si připomenout, že mimo hlavní meridián, který má rovinu rovnoběžnou s nárysnou, může mít každý bod plochy svůj meridián, jehož rovina ovšem už bude vůči nárysně natočená. Obdoba poledníků na globu či dílků pomeranče.)*
Bude tedy naklonění spádové přímky tečné roviny závislé na tvaru a naklonění křivky meridiánu v okolí bodu X. V půdoryse se však vše v tomto meridiánu promítá do přímky. Mohli bychom sice tento meridián sklopit do 3. průmětu, ale to by bylo zdlouhavé a nepraktické. Sestrojovat - bod za bodem - tento meridián v nárysu by také dalo dost práce *(museli bychom využít toho, že 2.průmět meridiánu bodu X je afinně svázaný s hlavním meridiánem a osou afinity je 2. průmět osy rotace o_2).*
Nejvhodnější je využít toho, že máme před sebou zakřivení hlavního meridiánu a tento hlavní meridián si prostě „*vypůjčit*“. To provedeme tak, že bod X v prostoru otočíme po rovnoběžkové kružnici o malý oblouček do roviny hlavního meridiánu a označíme jako X^o. Otáčení v půdoryse je sice provedeno, ale ani není označeno jako X_1^o, protože v půdoryse není důležité. Zato v 2. průmětu bod na hlavním meridiánu je označen jako X_2^o a je důležitý velmi. Je v něm sestrojena tečna ke hlavnímu meridiánu, označena jako $s^{\tau o}$. (Prakticky lze využít toho, že hlavní meridián má v tomto místě jako kruhový oblouk svůj střed Ω na ose x. Čili na poloměr ΩX_2^o vedeme tečnu $s^{\tau o}$ kolmo.) U této tečny $s^{\tau o}$ vyhledáme průsečík V_2 s osou rotace o_2 (pokud vychází hodně vysoko, nebudeme jej užívat). Byl by to vrchol rotačního kužele, který by se dotýkal dané rotační plochy právě podél rovnoběžkové kružnice. Určitě ale také vyhledáme půdorysný stopník této tečny $s^{\tau o}$, označíme G_2^o, leží zajisté na ose x. Na této ose x také vidíme přímo, ve skutečné velikosti, vzdálenost tohoto stopníku od osy o rotace. V půdorysu však *vždy* vidíme vzdálenosti bodů od osy rotace - ve skutečné velikosti - a platí to pro všechny směry těchto vzdáleností, jsou vodorovné a proto se nezkreslují. Rovina hlavního meridiánu v 1.průmětu je popsána jako ${}^{II}h_1^\rho$, protože hlavním přímka II. osnovy (rovnoběžná s nárysnou) v rovině hlavního meridiánu leží také.

Ordinálou nebo kružítkem (přesnější) převezmeme vzdálenost G_2^o od osy o_2 a naneseme od o_1 v rovině hlavního meridiánu doprava, a označíme koncový bod jako G_1^o. Opakujeme a naneseme tuto vzdálenost i na 1. průmět spádové přímky s_1^τ, procházející přímo bodem X_1 a označíme jako G_1. Toto je důležitý okamžik, protože už máme první stopník pro půdorysnou stopu tečné roviny. Vedeme tedy bodem G_1 tuto půdorysnou stopu p_1^τ a sice kolmo ke spádové přímce s_1^τ tečné roviny. Nárysnou stopu tečné roviny ani neužíváme (v případě nutnosti je tečná rovina t určena půdorysnou stopou a bodem X, nárysnou stopu bychom proto hledali některou hlavním přímkou tečné roviny.

Tečna t **čáry řezu,** obr.4. :

Její význam spočívá v tom, že podporuje tvar čáry řezu a proto je logické, očekávat konstrukci tečny t časově dříve, než vytahování křivky „*odhadem*“. Určitě nesmí být tečna t řešena a chápána tak, že by se prostě k namalované čáře (odhadem) přiložilo pravítko.
Předpokládejme, že tečna t leží v rovině řezu ρ, protože je tečnou rovinné čáry.
Předpokládejme dále větu: *V běžném bodě X plochy platí, že všechny tečny (jako přímky), dotýkající se plochy právě v bodě X, leží v tečné rovině τ plochy (také se dotýkající plochy právě v bodě X).*
Když tyto dvě skutečnosti „spojíme“, dospějeme k větě: *Tečna t čáry řezu je průsečnicí roviny řezu ρ s tečnou rovinou τ.*
V našem případu máme společný bod X jako první bod této průsečnice. K tomu ještě připojíme jako nejvhodnější bod průsečík P^t půdorysných stop p^τ a p^ρ obou rovin: tečné roviny τ a roviny ρ řezu. Vše je vidět ale jenom v 1. průmětu: $p_1^\tau \cap p_1^\rho = P_1^t$. Pouhým spojením $X_1 P_1^t = t_1$ získáme půdorys tečny t. Nárys t_2 už jenom doplňujeme: ordinálou odvodíme 2. průmět stopníku tečny P_2^t a tento napojíme na X_2, získáme tak nárys tečny t_2. Protože zde specielně je bod X_2 na odvrácené (neviditelné části) plochy, bude tečna t_2 v okolí bodu X_2 neviditelná, čárkovaná.
Tečnu v druhém bodě Y nemusíme takto pracně sestrojovat, protože čára řezu je jak v prostoru, tak i v 1. průmětu souměrná podle jisté spádové přímky roviny řezu. Jedná se o tu spádovou přímku, která protíná osu rotace, je označena jako s_1^ρ a je zajisté kolmá k půdorysné stopě p_1^ρ roviny řezu ρ. Proto i vzdálenosti půdorysných stopníků (označených jako P_1^t) symetrických tečen s dotykovými body X a Y jsou od stopníku P_1^s spádové přímky stejné.
Pokud jsme tedy pracně nalezli aspoň jednu tečnu a jeden její půdorysný stopník P_1^t, pak stačí kružítkem jeho vzdálenost od stopníku P_1^s přenést na druhou stranu, až obdržíme bod P_1^t (rozlišený v obr. pruhem nad písmenem). Opět bychom odvodili ordinálou jeho 2. průmět P_2^t, dále jej spojili s bodem Y_2 a tak bychom získali i v náryse druhou tečnu t_2.

Body E_2 a F_2 změny (přechodu) viditelnosti čáry řezu vzhledem k nárysně, obr.5. :

Znovu si připomeňme, že hlavní meridián plochy je čarou skutečného obrysu vzhledem k nárysně. (Pro zapamatování názvu si říkejme, že čára leží na skutečné ploše, hmotě.) Jeho průmět do nárysny je nazýván čarou zdánlivého obrysu. *(Pro zapamatování: zdánlivý obrys v nárysně lze přirovnat k obrysu stínu plochy, který ovšem je jen dočasný, zdánlivý a zmizí, jakmile osvětlení skončí)*
Z roviny řezu ρ leží v rovině hlavního meridiánu (tj, v rovině skutečného obrysu) hlavní přímka II. osnovy ${}^{II}h_2^{\rho}$, u které je v obr. vyznačen i půdorysný stopník P_1^h. Odvodíme ordinálou jeho nárys P_2^h a narýsujeme celý nárys této hlavní přímky ${}^{II}h_2^{\rho}$ rovnoběžně s nárysnou stopou n_2^{ρ} právě připraveným 2. průmětem nárysného stopníku P_2^h hlavní přímky. Průsečíky E, F (v prostoru) hlavní přímky a hlavního meridiánu (tj.skutečného obrysu plochy) jsou už body přechodu viditelnosti. Proč? : Tyto body leží na ploše, protože leží na křivce hlavního meridiánu (a ten na ploše leží). Dále tyto body ještě leží také v rovině řezu, protože leží na hlavní přímce této roviny řezu. Protože tedy tyto body leží na ploše a v rovině řezu, nutně patří ke křivce řezu, označené zde l_2. Jejich 1. průměty lze ordinálami také odvodit, jsou to sice už jen obecné body čáry řezu vzhledem k půdorysně, ale jsou i takto vítanými. Doplňují nám totiž prostě čáru řezu o další body. Můžeme je ještě použít navíc pro vyhledání dalších bodů, k nim symetrickým přes osu souměrnosti celého řezu. Tou osou je spádová přímka s^{ρ} roviny řezu, ta spádová přímka, která protíná i osu rotace (v bodě Q).

Body R, H přechodu viditelnosti vzhledem k půdorysně, obr.6 :

Na rotační ploše může (podle tvaru jejího hlavního meridiánu) existovat více rovníkových a více hrdlových kružnic. Ne však všechny svou polohou patří do oblasti čáry řezu, zde do oblasti, na výšku vymezené kótou Δz. Zda na rovníkové kružnici jsou body čáry řezu, zjistíme jednoduše např. takto (podle úkonu „*obecné body X a Y*“ a obr.2): Prakticky: zavedeme rovníkovou kružnicí vodorovnou hladinu, v náryse se jeví jako přímka. Tato hladina protíná i rovinu řezu v hlavní přímce I. osnovy a my na ni vyhledáme i nárysný stopník, nejdříve N_2^h a pak ordinálou i N_1^h. Potom sestrojíme také 1. průmět této hlavní přímky, vedeme jej stopníkem P_1^h rovnoběžně s půdorysnou stopou p_1^{ρ}. Pokud hlavní přímka v 1. průmětu protne 1. průmět rovníkové kružnice, pak jsme dostali body přechodu viditelnosti vzhledem k půdorysně a čára řezu v nich mění viditelnost (nastává to v bodech R_1 a R_1, které jsou vzájemně v prostoru zase souměrné pro osu souměrnosti, spádovou přímku s^{ρ}). Jak ji mění, většinou posoudíme ze souvislostí a z okolí těchto bodů. Jejich 2. průměty odvodíme ordinálou, jsou už jen obecnými body a jen vhodně doplňují tvar čáry řezu. Tento proces opakujeme i u hrdlové kružnice, až získáme (nejdříve v půdoryse) body H_1 a $\overline{H}_1$. Potom ještě i tady ordinálami doplníme i jejich nárysy (zase už jen jako doplňující, obecné body vzhledem k nárysně).

Pokud by hlavní přímka příslušnou kružnici neprotťala, nebudou na takové kružnici žádné body přechodu viditelnosti.
Pokud by se hlavní přímka právě takové kružnice dotkla, půjde o jeden bod a bude to tzv. vrchol čáry řezu (na spádové přímce s^ρ roviny řezu).

Nejvyšší bod M a nejnižší bod N čáry řezu vzhledem k půdorysně, obr.7 :

Z důvodů praktických je dobré vůbec začít vyhledáním právě těchto bodů, protože ukazují na typ čáry řezu a vymezují tzv. *„pracovní prostor"*, v obr. označený kótou Δz. Mimo tento prostor nemá smyslu ztrácet čas kladením vodorovných hladin pro namátkové vyhledání bodů čáry řezu, protože tam žádné takové body čáry řezu prostě nejsou.
Řekli jsme si už v minulém odstavci, že osou souměrnosti čáry řezu je taková spádová přímka s^ρ, která protíná osu rotace o. Hledané body na této ose souměrnosti leží často, pokud jsou to tzv. vrcholy čáry řezu (předpokladem je, že čára řezu je v těchto bodech uzavřená.)
Jiný případ by nastal, kdyby rovina řezu byla natolik strmější , že by čára řezu nahoře vytvářela dvě souměrné větve (a nebyla tudíž uzavřenou čarou). Potom ovšem by nejvyšší body byly koncové body těchto větví.
Body M, N, které nyní hledáme, jsou také průsečíky osy souměrnosti s rotační plochou nebo jinak: s tím meridiánem rotační plochy, který má společný 1. průmět s osou souměrnosti s_1^ρ. Je jisté, že v 1. průmětu nic neuvidíme, protože uvedená rovina meridiánu a spádové přímky je v promítací poloze. Zavádět kvůli této úloze třetí průmětnu je notně nepraktické a velmi bychom se zdrželi rýsováním velkého množství bodů pro získání obrysu plochy v třetím průmětu. Jako praktické se bude jevit, v nárysе využít obrysu plochy, tj. hlavního meridiánu. Ve svislé promítací rovině spádové přímky s^ρ její meridián tedy nemáme. Představme si, že tuto svislou promítací rovinu otočíme okolo osy o do roviny hlavního meridiánu. Potom obecný meridián (dosud nenarýsovaný) splyne s nachystaným hlavním meridiánem (což je časově výhodné). Musíme ale počítat s tím, že při tomto otáčení svislé roviny se musí otočit do roviny hlavního meridiánu také spádová přímka, aby byla s poloze s nárysnou rovnoběžné a abychom pak mohli její průsečíky s hlavním meridiánem považovat za otočené průsečíky M^o a N^o). Takové otočené průsečíky nakonec co nejjednoduševji vrátíme a otočíme zpět na původní polohu spádové přímky (polohu ještě před otáčením).
Jak tedy původní spádovou přímku otočíme ? :
Pro otáčení na ni vybereme dva body. Výhodný je její průsečík Q s osou otáčení, protože: je-li na ose otáčení, je bodem samodružným, již otočeným, nemění svoji polohu. Jako další bod bude nejvhodnější půdorysný stopník spádové přímky P_1^s na půdorysné stopě p_1^ρ roviny řezu ρ. Kružítko zabodneme do osy o_1 a obloučkem bod P_1^s převedeme do otočené polohy P_1^{so} v rovině hlavního meridiánu. Ordinálou odvodíme nárys P_2^{so}. Raději a přesněji však naneseme poloměr otáčení kružítkem od osy rotace o_2 po ose x doprava a tak také získáme P_2^{so}. Propojením Q_2 a P_2^{so} získáme 2. průmět otočené spádové přímky (je čerchovaný) $s_2^{\rho o}$.

Ten protne hlavním meridián v otočeném nejvyšším bodě M_2^o a nejnižším bodě N_2^o. Při otáčení jsou kruhové dráhy těchto bodů vodorovné a jeví se proto v náryse jako vodorovné úsečky. Proto v otočených bodech M_2^o a N_2^o vedeme v náryse vodorovné přímky, až protnou nárys spádové přímky s_2^ϱ. Budou to hledané body M_2 a N_2. Při odvozování jejich půdorysů můžeme (kromě nepřesné ordinály) použít skutečnosti, že v otočených polohách tyto body M_2^o a N_2^o ukazují ve skutečné velikosti své vzdálenosti od osy rotace. Zároveň víme, že při pohledu na půdorysnu shora takové vzdálenosti od osy rotace se ukazují vždy ve skutečné velikosti a to ve všech směrech. Proto lze kružítkem v náryse takovou vzdálenost ve vodorovném směru od osy o_2 odměřit a přenést do půdorysu na spádovou přímku (je osou souměrnosti čáry) do bodů M_1 a N_1. Dodejme ještě, že tečny v těchto bodech M a N jsou vodorovné (protože jde o vrcholy).

Postup celého příkladu :

Z úsporných a z praktických důvodů může mít jiné pořadí úkonů, než základní výklad. (Neosvědčilo se však - z důvodu možného chaosu - prvotní výklad hned podávat s „přeházenými“ úkony, podle zde níže nastíněného postupu.) Teprve, když student látku zvládl a „vidí“ do problému, pak může postupovat úsporně.

Nastíněný postup :

(1) Nejdříve bychom našli nejvyšší bod M a nejnižší bod N a tak vyznačili v náryse pracovní prostor Δz. Zároveň při otočení spádové přímce $s_2^{\varrho o}$ si uděláme lepší prostorovou představu o tvaru čáry řezu, tj, zda má „*oka*“ nebo zda má „*větve*“ a nemusíme už tolik tápat.
(2) Potom bychom vyhledali body E a F přechodu viditelnosti vzhledem k nárysně a rozmnožili bychom je o body souměrné podle spádové přímky s^ρ.
(3) Doplnili bychom o body H a R přechodu viditelnosti vzhledem k nárysně.
(4) Nyní už máme několik bodů. Vkládáme proto vodorovné hladiny (pro obecný bod X a Y především tam, kde zatím body čáry řezu chybějí. Přitom podle odhadnutého tvaru čáry řezu shledáme, že některé body můžeme i vynechat, pakliže tvar čáry tam asi nebude příliš zakřivený.
(5) Pokud si tvarem na některém místě nebudeme jisti (např. napravo od nejnižšího bodu N_2), připravíme tam konstrukci tečny t (u zkoušky ovšem povinně, aby ukázali, že konstrukci známe).

RNDr. Pavel Talanda v.r.

Typeset by *ZOBI*–TEX
Mgr. Jan J. Šafařík